

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
CAMPUS GUARULHOS

LIDIANE CHAVES ZEFERINO

**APRENDER A ENSINAR FRAÇÕES A PARTIR DO CONCEITO DE ATIVIDADE  
ORIENTADORA DE ENSINO: UM ESTUDO COM PROFESSORES DE QUARTOS  
E QUINTOS ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

GUARULHOS  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
CAMPUS GUARULHOS

LIDIANE CHAVES ZEFERINO

**APRENDER A ENSINAR FRAÇÕES A PARTIR DO CONCEITO DE ATIVIDADE  
ORIENTADORA DE ENSINO: UM ESTUDO COM PROFESSORES DE QUARTOS  
E QUINTOS ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Paulo como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação. Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Dias Moretti.

GUARULHOS  
2016

Zeferino, Lidianne Chaves.

Aprender A Ensinar Frações A Partir Do Conceito De Atividade Orientadora De Ensino:  
Um Estudo Com Professores De Quartos E Quintos Anos Do Ensino Fundamental/  
Lidianne Chaves Zeferino – 2016.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2016.

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Dias Moretti.

Título em inglês:

1. Atividade orientadora de ensino
2. Formação de professores
3. Educação matemática
4. Teoria Histórico-cultural
5. Ensino fundamental

LIDIANE CHAVES ZEFERINO

**APRENDER A ENSINAR FRAÇÕES A PARTIR DO CONCEITO DE ATIVIDADE  
ORIENTADORA DE ENSINO: UM ESTUDO COM PROFESSORES DE QUARTOS  
E QUINTOS ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Paulo como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação. Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Dias Moretti.

Aprovado em: 21/12/2016

---

Profa. Dra. Neusa Maria Marques de Souza  
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

---

Profa. Dra. Maria Lucia Panossian  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

*Ao Paulo, Guilherme e Letícia  
por darem a minha vida direção,  
o tom, a cor...*

*E, ao fim, quando baixei novamente à planície e da planície, após, descí aos vales meus, meus olhos viram, num deslumbramento, que também nas planícies e nos vales, em tudo, estava Deus.*

*Gibran Khalil Gibran*

## AGRADECIMENTOS

À orientadora Profa. Dra. Vanessa Dias Moretti, pela dedicação paciência e confiança ao longo das orientações, incentivos que tornaram possível a conclusão desta pesquisa.

Aos amigos do GEPPEDH – Grupo de Estudos e Pesquisa em Processos Educativos e Perspectiva Histórico-Cultural – Unifesp, em especial aos companheiros de pesquisa, Fábio, Irajá, Gisele e Adriane que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Ao Paulo, pelo apoio nos momentos de dificuldades e por sua capacidade de me trazer paz na correria dessa produção acadêmica.

Aos meus filhos Guilherme e Letícia que iluminam de maneira especial os meus dias e pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos.

À minha irmã e sobrinhos pelo apoio e carinho.

Às colegas de trabalho, em especial a Elisabete, Roseli Araújo, Kátia Cristina e Miriam Augusto pelas alegrias, tristezas e ansiedades compartilhadas durante a produção dessa pesquisa.

À Thaís e Denise pelos momentos de reflexão e conversas sobre os desafios presentes na vida acadêmica.

Aos meus colegas de profissão, das diversas escolas em que lecionei, especialmente à Claudia Badiali e Márcia Cristina, amigas de longa data, com quem compartilhei o desejo de ingresso no mestrado.

Às Profa. Dra. Neusa Maria Marques de Souza e Profa. Dra. Maria Lucia Panossian pelas contribuições no exame de qualificação. É uma honra tê-las na banca examinadora.

Aos professores que participaram do experimento didático.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu obrigada.

*Se alguma coisa nos anima a escrever é a possibilidade de que esse ato de escritura, essa experiência em palavras nos permita liberar-nos de certas verdades, de modo a deixarmos de ser o que somos para ser outra coisa, diferente do que vimos sendo.*

*Jorge Larrosa e Walter Kohan*



## RESUMO

O presente trabalho visa abordar as contribuições para o ensino de frações a partir de uma perspectiva histórico-cultural, tomadas de forma geral a partir das produções de Vigotski, Davidov e a Teoria da Atividade proposta por Leontiev (1983). Particularmente, na organização do ensino do conceito de fração, a pesquisa adota como referência o conceito de Atividade Orientadora de Ensino. A pesquisa apresenta como questão central investigar *“Como a organização do ensino da matemática, mais especificamente do conceito de Frações, a partir das contribuições da Teoria Histórico-Cultural e da Atividade Orientadora de Ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática, no quarto e quinto ano do ensino fundamental?”*. Para a concretização dessa pesquisa, utilizamos como referência metodológica o materialismo histórico dialético e como princípio orientador da investigação, o experimento didático, compreendido como um método de investigação que possibilita estudar a essência das relações internas entre os diferentes procedimentos da educação e do ensino, o qual ocorreu na forma de um curso de extensão voltado à formação continuada de professores dos quartos e quintos anos do Ensino Fundamental. Os dados coletados durante o processo de investigação foram analisados e organizados em um Isolado: o movimento do pensamento teórico e a organização do ensino de fração. De acordo com os resultados obtidos, a pesquisa demonstra que tanto o conhecimento sobre o conceito das frações, quanto à organização do ensino estão ancorados nas características do pensamento empírico, limitando o conceito de fração a sua dimensão da quantificação discreta. Tal contexto dificulta o ensino e a aprendizagem desse conceito, pois não estabelece relação com os elementos essenciais do conceito, como por exemplo, a gênese da fração, distanciando-se, portanto, do desenvolvimento do pensamento teórico. Diante dos dados analisados, podemos indicar que o conceito de Atividade Orientadora de Ensino influencia a transformação do tipo de pensamento, do pensamento empírico para o pensamento teórico, pois mobiliza os docentes a rever o sentido de sua atividade, em um processo de organização consciente e intencional do ensino da matemática.




Palavras-chave: Teoria Histórico-Cultural, Conceito de Fração, Aprendizagem docente, Atividade Orientadora de Ensino, Pensamento Teórico.

## ABSTRACT

The present work aims to address the contributions to the teaching of fractions starting from a historical and cultural point of view, taken generally starting from the productions of Vigotsk, Davidov and the theory of activities proposed by Leontiev (1983). Specially, in the organization of the teachings of concepts of fraction, the research shows as a central issue to investigate "How the organization of mathematics teaching, more specifically the concepts of fractions, starting from the contributions of the historical and cultural theory and the guiding activity of teaching, influences and is influenced by the development of theoretical thinking of the teacher who teaches math in the fourth and fifth grade in the elementary school". For the substantiation of this research, we utilize as methodological references the historical dialectical materialism and as guiding principle the investigation of the teaching experiment, understood as a method of investigation which allows the study of the essence of internal relations between the different procedures of the education and teaching, which occurred in the form of an extension course turned to continuing education of teachers of the 4th and 5th grade of elementary school. The collected data during the process of investigation were analyzed and organized into: "The movement of theoretical thought and the organization of fraction teaching". According to the results, the research shows that both the knowledge about the concept of fractions, as to the organization of teaching are anchored in the characteristics of empirical thinking, limiting the concept of fraction to its dimension of discrete quantification. Such context difficult the teaching and the learning of this concepts, because it does not set the relation with the essential elements of the concept, for example the genesis of the fraction, therefore distancing from the development of the theoretical thinking.

Key words: historical and cultural theory, concept of fraction, teaching learning, guiding

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Força motriz do conceito de atividade.....	27
Figura 2 - Ações docentes na perspectiva da AOE a partir de Moura (1996, 2010).....	36
Figura 3 - Representação hieroglífica das frações egípcias. Baseado em Ifrah (2010).....	41
Figura 4 - Proposta de exercício da Coleção A - do 4º ano. Capítulo sobre Fração. ....	47
Figura 5 - Coleção B - 5º ano. Primeira página do capítulo sobre Fração. ....	48
Figura 6 - Proposta de exercício da Coleção C, livro destino ao 5º ano do Ensino Fundamental. ....	48
Figura 7 - Coleção D - destinada para 5º ano. Primeira página do capítulo introdutório do Conceito de Fração. ....	49
Figura 8 - Concepção parte-todo representação simbólica.....	53
Figura 9 – Figuras que mobilizam o trabalho com a área. ....	53
Figura 10- Movimento dialético: singular-particular-universal, a partir de Oliveira (2005). ..	57
Figura 11 - Movimento Dialético .....	76
Figura 12 - Resolução da AOE - No Egito antigo. Registro dos professores dos 4º anos. ....	91
Figura 13 - Resolução da AOE - No Egito Antigo. Registro dos professores dos 5º anos. ....	93
Figura 14 - Fátima professora do 4º ano .....	95
Figura 15 - Ana professora do 5º ano.....	97
Figura 16 - Proposta – 1. (Ana e Rita, profa. 5º ano, E – 13,  ) .....	102
Figura 17 - Proposta – 2. (Cleo e Rute, profa. 4º ano, E – 13,  ) .....	102
Figura 18 - Proposta – 3. (Nina e Cida, profa. 5º ano, E – 13,  ) .....	103
Figura 19 - Jogo da reta numérica. ....	105

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Principais características dos tipos de pensamento a partir de Davidov (1988). ...	32
Quadro 2 - Cronograma do experimento didático .....	73
Quadro 3 - Professores participantes da pesquisa. ....	75
Quadro 4 - Organização dos dados: Isolado e Episódios .....	77
Quadro 5 - Proposta dos professores do quarto ano. ....	81
Quadro 6 - Propostas dos professores do quinto ano.....	82

## LISTA DE ABREVIACÕES E SIGLAS

CEFAM - Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério

PIBID - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

AOE - Atividade Orientadora de Ensino

SME - Secretaria Municipal de Educação

DOEP - Departamento de Orientações Educacionais Pedagógicas

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	14
Meu processo de mudança.....	14
1. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DA PESQUISA.....	19
1.1. A Teoria Histórico-Cultural e a constituição do homem pela via do trabalho .....	19
1.2. Aprendizagem Docente e a Organização do Ensino .....	21
1.3. A palavra e a sua significação na Teoria Histórico-cultural .....	23
1.4. Teoria da Atividade.....	26
1.5. Desenvolvimento do Pensamento Teórico.....	30
1.6. Atividade Orientadora de Ensino: uma proposta teórica-metodológica para a organização do ensino.....	35
2. O CONCEITO DE FRAÇÕES .....	39
2.1. A História das Frações e seus Registros .....	40
2.2. Insuficiência dos Números Naturais .....	43
2.3. As Frações nos Livros Didáticos .....	45
2.4. Um olhar sobre os diferentes significados dos números racionais .....	50
3. O PERCURSO METODOLÓGICO .....	56
3.1. A Pesquisa em Movimento .....	56
3.2. Os participantes.....	60
3.3. Experimento Didático: O conceito de Fração e a organização do ensino a partir de Atividades Orientadoras de Ensino.....	63
3.4. Metodologia de análise .....	74
4. ISOLADO: O MOVIMENTO DO PENSAMENTO TEÓRICO E A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE FRAÇÃO .....	79
4.1. Episódio I – Nos limites do visual empírico .....	80
4.2. Episódio II – Frações e seus significados .....	86
4.3. Episódio III – Atividade Orientadora de Ensino: No Egito Antigo.....	91
4.4. Episódio IV– Atividade Orientadora de Ensino: As famílias egípcias e o pagamento de impostos .....	95
4.5. Episódio V – Análise, Reflexão e planificação das ações: Indícios da formação do pensamento teórico .....	98
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	110
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	116
ANEXO 1 .....	122

## INTRODUÇÃO

“Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs a caminhar.”  
(Paulo Freire)

### Meu processo de mudança...

“Estudar alguma coisa historicamente significa estudá-la no processo de mudança”  
(VIGOTSKI, 2007, p. 68).

Partindo dessa premissa de Vigotski, a presente pesquisa *Aprender a Ensinar Frações a partir do Conceito de Atividade Orientadora de Ensino: Um Estudo com Professores de Quartos e Quintos Anos do Ensino Fundamental* teve seu início no modo como fui constituindo-me professora que ensina matemática. Com o objetivo de evidenciar esse processo, farei um breve relato da minha trajetória profissional.

Falar da minha história como docente é falar da história de muitas professoras e professores, que assim como eu, passaram pelos mesmos caminhos formativos e dificuldades de atuar como professor que ensina matemática.

A minha história como docente teve início em 1998, quando ingressei como estudante no Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério - CEFAM<sup>1</sup>, curso que funcionava em período integral, com duração de quatro anos e estrutura de um curso técnico: ensino médio com curso profissionalizante. Anos depois, após a conclusão do Magistério, cursei Pedagogia, com objetivo de aprender mais para poder ensinar melhor. No entanto, essa ação formativa não diminuiu o meu desconforto em relação ao ensino da Matemática. Uma das causas relacionadas a essa situação é apontada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais na seguinte afirmação:

Partes dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionadas ao processo de formação do magistério, tanto na formação inicial como na formação continuada [...]. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta

---

<sup>1</sup> Centro de Formação do Magistério que nasceu com o objetivo de substituir o antigo Magistério e o Curso Normal. Apresentava uma visão diferenciada sobre a formação educacional, funcionava em período integral e os candidatos aprovados no processo seletivo recebiam uma bolsa de estudos. Esse projeto teve início no Estado de São Paulo em 1983 e foi extinto em 2005.

de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho. (BRASIL, 1997, p.22)

No ano de 2004, comecei a minha trajetória profissional na rede pública municipal de Guarulhos como professora do Ensino Fundamental I, podendo lecionar para salas do 1º ao 5º ano.

Em 2006, ingressei como professora titular na Rede Estadual de São Paulo. A necessidade de ter uma boa atuação como docente crescia, pois eu agora lecionava para duas turmas do primeiro ciclo do ensino fundamental, e estas precisavam de uma professora que soubesse organizar o ensino.

Lembro-me da minha insegurança em torno da organização do ensino de matemática. Insegurança que remete a problemas, foco de estudos de algumas pesquisas educacionais como os abordados nos estudos de Lorenzato (2006), nos quais fica evidente que o fracasso dos alunos diante da matemática depende de uma relação estabelecida, desde os primeiros dias escolares, entre a matemática e o educando, sendo fundamental a boa atuação do professor dos anos iniciais. Como afirma esse autor, ninguém aprende com aquele que leciona sobre o que não conhece, mesmo quando os alunos conhecem menos que um professor que leciona sem domínio do assunto, eles percebem, no mínimo, a insegurança desse professor. Segundo Silveira (2002), o ensino da matemática ainda está envolto pelo sentido preestabelecido de uma disciplina “difícil” e “para poucos”:

Esta “fama”, que deu voz a professores e alunos, demonstra a forma naturalizada e inquestionável que o saber matemático está constituído na escola: a matemática é tradicionalmente a disciplina que apresenta maior dificuldade. Assim, podemos perceber o discurso que fala da dificuldade da matemática, como um discurso pré-construído. (*sic*) (SILVEIRA, 2002, p.13).

É importante destacar que o ensino da matemática, de um modo geral, ainda apresenta algumas práticas equivocadas, muitas vezes, justificadas pelo processo de formação docente, como destacam os estudos feitos por Nacarato, Mengali e Passos (2009), quando afirmam que as professoras e professores dos anos iniciais, em geral, foram e são formadas (os) em contextos com pouca ênfase em abordagens que privilegiam as atuais tendências presentes nos documentos curriculares de matemática, refletindo negativamente a sua atuação em sala de aula.

As reformas curriculares não chegam até a formação docente e a sala de aula, o que faz com que a professora – principalmente nos primeiros anos de docência – reproduza os modelos que vivenciou como estudante. Isso contribui para a consolidação não apenas de uma cultura de aula pautada numa rotina mais ou menos homogênea do modo de ensinar matemática, mas também de um currículo, praticado



em sala de aula, bastante distante das discussões contemporâneas no campo da educação matemática. (NACARATO, MENGALI e PASSOS, 2009, p. 32).

Essas dificuldades, que permeiam a formação inicial e continuada dos professores, também estiveram presentes no meu processo de formação.

Durante as trocas de experiências entre os meus colegas de trabalho, momento muito comum na sala dos professores, eu tinha, como pauta das discussões, a necessidade de substituir a tradicional forma de ensinar os conceitos matemáticos, muitas vezes baseada em aulas apenas expositivas e atividades mecânicas de memorização, por uma nova atuação. Como aponta Fiorentini (2008), diante da necessidade de superar esse tipo de metodologia, o professor passou a ser continuamente desafiado a atualizar-se e a tentar ensinar de um modo diferente daquele vivido em seu processo de escolarização e formação profissional. Também era preciso compreender que o conteúdo/forma no ensino da matemática são elementos indissociáveis. Diante dessa situação, percebi que ter passado pelo curso Magistério e pela licenciatura em Pedagogia não eram suficientes. Era preciso continuar estudando as questões norteadoras das atividades de ensino e das atividades de aprendizagem.

Em 2009, comecei a ampliar o meu olhar para essas questões, pois naquele ano participei do curso de extensão “Oficina Pedagógica de Matemática”, oferecido pelo Departamento de Educação da Universidade Federal de São Paulo durante a hora-atividade na escola municipal na qual lecionava. Esse curso possibilitou meu primeiro contato com a Teoria Histórico-Cultural e a Teoria da Atividade. Depois, participei como aluna ouvinte da disciplina “Fundamentos Teórico-Prático do Ensino da Matemática I”, quando conheci mais a respeito da Teoria da Atividade e dos estudos de Moura que tratam sobre a Atividade Orientadora de Ensino.

Em 2012, tive a oportunidade de aprofundar a minha relação com o ensino da matemática, através da atuação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência<sup>2</sup> (PIBID), como professora supervisora no Subprojeto de Pedagogia, desenvolvido na escola pública em que lecionava. O subprojeto em questão tinha como foco discutir e atuar nas práticas escolares relacionadas ao ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse período possibilitou atribuir um novo significado para a minha

---

<sup>2</sup> O PIBID é um Programa da Diretoria de Educação Básica da CAPES e tem como objetivo fomentar a formação inicial de profissionais do magistério, seguindo as diretrizes do Plano de Metas Compromisso Todos pela Educação, estipuladas pelo Decreto nº 6.094/ 2007, e aos princípios da Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica, instituída pelo Decreto nº 6.755/2009. (BRASIL. CAPES, 2012).

aprendizagem docente; permitiu-me constatar quão importante é a relação entre a teoria e a prática na busca de uma ação docente mais coerente com as necessidades educacionais dos educandos.

A aproximação teórica com a Teoria da Atividade (LEONTIEV, 1978) e com a Atividade Orientadora de Ensino (AOE), apresentada por Moura (1996, 2010) como uma proposta de organização da atividade de ensino e de aprendizagem e sustentada pelos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, possibilitou-me, ao longo dos últimos anos, mudar a minha atuação como docente. Desde então, cada vez mais, esforço-me para que minhas ações, como profissional da educação, sejam organizadas de forma intencional e consciente.

No presente momento, a minha atuação docente ultrapassou os muros da escola. Atualmente, desenvolvo um trabalho com formação de professores, na Divisão de Ensino Fundamental, no Departamento de Orientações Educacionais Pedagógicas (DOEP) da Secretaria Municipal de Educação de Guarulhos - SP. Sinto, cada vez mais, a importância de aprofundar os meus estudos sobre a Teoria Histórico-Cultural, pois a utilização dessas lentes teóricas possibilita enxergar a formação docente como processo de aprendizagem e desenvolvimento, assim como, possibilitou-me muitas mudanças como docente, resultados de constantes reflexões sobre os conhecimentos teóricos apropriados durante meu trabalho docente. Na minha atuação junto aos professores, deparo-me com novos desafios e com questões que eu já buscava por respostas, sendo uma dessas, a questão: como a organização do ensino da matemática, a partir das contribuições da Teoria Histórico-Cultural, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina Matemática? No entanto, minha questão tornou-se mais específica ao aproximar-me dos participantes dessa pesquisa, pois eles também tinham as suas necessidades de estudo. Foi quando me fizeram chegar à necessidade de estudar e pesquisar sobre o conceito da Fração. Diante dessa situação, a questão da pesquisa também se tornou significativa para aquele grupo de professores.

### **Apresentação da pesquisa**

Na presente pesquisa, pretendemos compreender: *Como a organização do ensino da matemática, mais especificamente do conceito de Fração, a partir das contribuições da Teoria Histórico-Cultural e da Atividade Orientadora de Ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática, no quarto e quinto ano do ensino fundamental?* A pesquisa está organizada em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, apresentaremos os pressupostos teóricos da pesquisa: Teoria Histórico-Cultural, Teoria da Atividade, Desenvolvimento do Pensamento Teórico e a Atividade Orientadora de Ensino como uma proposta teórico-metodológica para a organização do ensino.

No segundo capítulo, abordaremos o movimento histórico do surgimento das frações e a estrita relação dos números racionais e as medidas. Também discutiremos: a organização do ensino para o conceito de Fração para o quarto e quinto anos do ensino fundamental I; como os livros didáticos apresentam o ensino de fração; e quais são as contribuições da Teoria Histórico-Cultural para a organização do ensino do conceito de Fração.

No terceiro capítulo, apresentaremos o nosso percurso metodológico, a organização do experimento didático e o conceito de *Isolado*.

No quarto capítulo, exibiremos a análise dos dados coletados, que estão organizados no Isolado: *O movimento do pensamento teórico e a organização do ensino de frações*.

No quinto capítulo, apresentaremos as considerações finais.

## 1. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DA PESQUISA

### 1.1. A Teoria Histórico-Cultural e a constituição do homem pela via do trabalho

Com a intenção de pesquisar as questões relacionadas à aprendizagem docente, a organização do ensino de matemática e, especialmente, *como a organização do ensino do conceito de Fração, a partir das contribuições da Teoria histórico-cultural e da Atividade Orientadora de Ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática no quarto e quinto ano do ensino fundamental*, optamos por utilizar as lentes teóricas da Teoria Histórico-Cultural e procurar entender o que influencia o desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática. Partindo desse propósito, compreendemos que a Teoria Histórico-Cultural contribui de forma significativa no estudo dos processos de desenvolvimento humano e da formação de sua individualidade, aqui projetada no trabalho docente e nas ações e necessidades do professor que ensina matemática. Dessa forma, é importante conhecer desde a origem das ações docentes até a apropriação do conhecimento matemático, os motivos da atividade e quais sentidos lhes são conferidos, pois acreditamos que o professor, ao agir intencionalmente para satisfazer as necessidades das suas ações docentes, transforma-se como indivíduo e, desse modo, favorece o desenvolvimento do pensamento teórico. Por isso, direcionamos nossas atenções para conhecer os fundamentos dessa perspectiva teórica advinda das produções de Vigotski (2007, 2010), Leontiev (1978), Davidov (1982, 1988), entre outros estudiosos.

A escolha teórica está relacionada à necessidade de ter como princípio o estudo de uma teoria que sustente a prática pedagógica e possibilite entender conceitos complexos que permeiam o processo de apropriação de conhecimento e desenvolvimento humano, tendo como ponto de partida compreender o processo de humanização. A busca dessa compreensão gera inúmeras inquietações: O ser humano já nasce humano? As características da espécie humana estão presentes desde o nascimento? O que diferencia os seres humanos dos animais?

Essa distinção entre o homem e o animal é evidenciada na Teoria Histórico-Cultural fundamentando-se no conceito de consciência humana. Vigotski (1988) utiliza como elemento de apoio a essa teoria os estudos de Marx (1984) e analisa uma de suas narrativas que explana o conceito de trabalho:

A aranha executa operações que lembram as de um tecelão, e as caixas que as abelhas constroem no céu poderiam envergonhar o trabalho de muitos arquitetos.

Mas mesmo o pior arquiteto difere da mais hábil abelha desde o princípio, pois antes de ele construir uma caixa de tábuas, já a construiu em sua cabeça. No término do processo de trabalho, ele obtém um resultado que já existia em sua mente antes que ele começasse a construir. O arquiteto não apenas muda a forma dada a ele pela natureza, dentro dos limites impostos pela natureza, mas também leva a cabo um objetivo seu que define os meios e o caráter da atividade ao qual ele deve subordinar a sua vontade. (MARX, 1984, apud VIGOTSKII, 1988, p. 25).

A partir dessa análise, Vigotski (1988) afirma que o comportamento consciente pode estar presente nas relações sociais que os sujeitos estabelecem com seu ambiente e assegura que “o homem não é apenas um produto de seu ambiente, é também um agente ativo no processo de criação deste meio”. (VIGOTSKI, 1988, p. 25). Do mesmo modo, as obras de Leontiev (1978) descrevem a relação do surgimento da consciência humana a partir do trabalho:

Sabe-se que a hominização dos antepassados animais do homem se deve ao aparecimento do trabalho e, sobre esta base, da sociedade. “O trabalho, escreve Engels, criou o próprio homem.” Ele criou também a consciência do homem. (...) O aparecimento e o desenvolvimento do trabalho, condição primeira e fundamental da existência do homem. (LEONTIEV, 1978, p.70)

Leontiev (1978) define *trabalho* como o processo que estabelece uma ponte entre o homem e a natureza, sendo o homem um ser ativo que age sobre a natureza. Seu pensamento corrobora com Marx: “O trabalho é primeiramente um ato que se passa entre o homem e a natureza. O homem desempenha para com a natureza o papel de uma potência natural.” (MARX, 1984, apud LEONTIEV, 1978, p. 74). Essa relação com a natureza acontece por meio da ação do homem que transforma a natureza, ao mesmo tempo em que age e a modifica. Diante desse processo, o homem também modifica a si mesmo.

O trabalho é caracterizado por dois elementos interdependentes: o uso e a criação de instrumentos (LEONTIEV, 1978). E, a partir dessa compreensão de trabalho, observaremos as ações do trabalho docente em seu processo de aprendizagem e organização do ensino, mais especificamente nessa pesquisa, a organização de ensino de matemática do quarto e do quinto ano do Ensino Fundamental, que se materializa na necessidade de compreender os elementos da ação docente que influenciam o desenvolvimento do pensamento teórico. Assim, partimos do princípio que a aprendizagem docente, ao ter o seu alicerce em uma teoria que investiga o processo de aprendizagem, pode favorecer a organização do ensino e potencializar momentos de análises, reflexões e planificações das ações docentes (DAVIDOV, 1988).

A Teoria Histórico-Cultural é uma abordagem que explicita uma educação promotora do desenvolvimento humano, porque se aprofunda nos estudos das questões relacionadas ao

processo de apropriação de conhecimento e desenvolvimento humano. Como aponta Marx<sup>3</sup> (1962) em seus estudos: “o processo de constituição do ser humano que se torna humano à medida que age sobre a realidade, no processo de apropriação da natureza e dos elementos da cultura, transformando-os e transformando a si mesmo.” (MARX apud MELLO & LUGLE, 2014, p. 263).

## 1.2. Aprendizagem Docente e a Organização do Ensino

A Teoria Histórico-Cultural nos auxilia a compreender o processo de aprendizagem docente e a estabelecer elementos que favoreçam a organização do ensino. Como afirmam Mello e Lugle (2014) a Teoria Histórico-Cultural:

[...] parte do pressuposto de que o ser humano é um ser de natureza social, o que significa dizer que suas qualidades humanas - as capacidades, as habilidades e as aptidões, ou em outras palavras, sua inteligência e personalidade – são aprendidas. (MELLO e LUGLE, 2014, p. 263).

Compreende-se assim, a apropriação do conhecimento como um fenômeno ativo, o ser humano e sua humanidade, como produtos da sua história, criada pelos próprios seres humanos ao longo da sua trajetória. Segundo Moretti (2011), se:

[...] dentro da perspectiva histórico-cultural, o homem se constitui pelo trabalho, entendendo esse como atividade humana adequada a um fim e orientada por objetivos, então o professor constitui-se professor pelo seu trabalho – a atividade de ensino – ou seja, o professor constitui-se professor por meio da atividade de ensino. Em particular, ao objetivar a sua necessidade de ensinar e, consequentemente, de organizar o ensino para favorecer a aprendizagem. (MORETTI, 2011, p.443)

Por isso, conceber a atividade docente como um trabalho, a partir da concepção presente na obra de Marx e Engels (1876, p. 04) significa compreender que: “o trabalho é a condição básica e fundamental de toda a vida humana. E em tal grau que, até certo ponto, podemos afirmar que o trabalho criou o próprio homem”. Desse modo, o trabalho se objetiva respondendo às necessidades que foram surgindo na relação com seu ambiente, alterando a natureza e a si próprio. Como resultado desse processo, o homem por meio do trabalho, passa a controlar seu comportamento, da mesma forma que domina a natureza (ENGELS, 1978).

Ao entender que o ser humano se constitui nas relações que estabelece com o mundo físico e social, tendo como propósito atender as suas necessidades, emerge a atividade aqui entendida como um conceito que permite à compreensão do desenvolvimento do professor em

---

<sup>3</sup> MARX, K. Manuscritos Econômicos e Filosóficos. Em Fromm, E. – O conceito Marxista de Homem, Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1962.

que o seu trabalho se relaciona, de forma direta, ao processo educativo que se desdobra no desenvolvimento humano, como destacam Rigon, Asbahr e Moretti (2010):

A educação é entendida, na perspectiva teórica que assumimos como uma via para o desenvolvimento psíquico e principalmente humano, e não como mera aquisição de conteúdos ou habilidades específicas. E é com base nesse posicionamento que afirmamos a necessidade da presença da educação sistematizada em todas as fases do desenvolvimento, dado que ela permite uma organização consciente dos processos de formação dos indivíduos, via organização intencional de um ensino que permita aos sujeitos a apropriação de conhecimentos, de habilidades e de formas de comportamentos produzidos pela humanidade. (RIGON, ASBAHR e MORETTI, 2010, p. 29).

Compreender a formação docente como processo de aprendizagem nos conduz ao conceito da formação humana como um processo que promove o desenvolvimento, Moretti e Moura (2010, p. 347) ressaltam “que é no trabalho docente, ao desenvolver ações intencionais que tenham por objetivo dar conta dos desafios cotidianos do ensinar, que o professor constitui-se professor”.

Assim, a aprendizagem docente deve ser resultado de um constante movimento da atividade teórica e da atividade prática, como afirma Ribeiro (2011)

[...] o sujeito vai se formando professor no movimento da atividade teórica e da atividade prática, por meio do qual a teoria vai iluminando a prática e a prática vai fundamentando a teoria, rumo a constituição do pensamento teórico do professor sobre a docência. (RIBEIRO, 2011, p. 28)

Dessa forma, o professor em sua atividade (o conceito de atividade será aprofundado no item 1.4 desse capítulo) tem como foco principal favorecer o desenvolvimento dos estudantes em direção à apropriação do conhecimento produzido historicamente, mesmo que para a concretização desse objetivo passe pela necessidade de rever sua prática, buscando novas maneiras de trabalhar a articulação entre a teoria e a prática, principalmente na organização do ensino de Matemática. Como afirma Moretti (2011):

A aprendizagem da docência em Matemática (...) não é uma aprendizagem possível apenas no âmbito de reflexões teóricas. Aprender a ser professor e, particularmente, aprender a ensinar matemática, passa por deparar-se com o desafio e a necessidade de organizar o ensino para favorecer a aprendizagem das crianças. (MORETTI, 2011, p. 387)

Diante dessa premissa, a Teoria Histórico-Cultural apresenta-se como adequada, pois se fundamenta no processo de apropriação da cultura humana, compreendendo o ser humano em sua totalidade complexa que se constitui no conjunto das relações sociais. No âmbito educacional, apoiando-nos nos pensamentos de Vigotski e Davidov, podemos considerar o espaço escolar como o mais privilegiado para a apropriação dos conhecimentos científicos historicamente construídos, favorecendo o desenvolvimento de formas complexas de pensamento. Nesse contexto, potencializar a aprendizagem docente e a organização do ensino

com ações que possibilitam a formação do pensamento teórico dos estudantes, passa pelo processo de desenvolvimento do pensamento teórico do docente.

No processo do desenvolvimento da aprendizagem docente, foi possível observar durante a pesquisa, a importância de compreender a significação de alguns termos e conceitos, presentes na comunicação do grupo docente pesquisado, pois pensar na significação atribuída a algumas palavras, possibilitou discutir o sentido ideológico presente naquele grupo. Podemos relacionar o movimento da significação de alguns termos e conceitos, por parte do grupo pesquisado, com a ideia da internalização de signos sociais compreendida por Bakhtin (1997) como um elemento essencial que está diretamente envolvido nas relações humanas, sendo o indicador mais sensível das transformações sociais. Essa comunicação, materializada nas palavras, manifesta o sentido ideológico e vivencial que, para esse autor, constitui uma presença viva da história e se relaciona com o contexto sustentado por um conjunto de significados que lhe foram socialmente atribuídos.

No próximo item desse capítulo, discutiremos o papel da significação na Teoria Histórico-Cultural.

### **1.3. A palavra e a sua significação na Teoria Histórico-cultural**

A Teoria Histórico-Cultural elucida que o pensamento e a palavra surgem e se constituem, unicamente, no processo do desenvolvimento histórico da consciência humana, sendo a linguagem, um produto e não uma premissa da formação do homem. A unidade do pensamento e da linguagem manifesta-se na significação da palavra (VIGOTSKI, 2010), significação aqui compreendida a partir da definição de Leontiev (1978):

A significação é aquilo que num objecto ou fenómeno se descobre objectivamente num sistema de ligações, de interações e de relações objectivas. A significação é reflectida e fixada na linguagem, o que lhe confere a sua estabilidade. Sob a forma de significações linguísticas, constitui o conteúdo da consciência social, torna-se assim a “consciência real” dos indivíduos, objectivando em si o sentido subjectivo que o reflectido tem para eles.

Assim, o reflexo consciente é psicologicamente caracterizada pela presença de uma relação interna específica, a relação entre sentido subjectivo e significação. (LEONTIEV, 1978, p.94)

Vigotski ressalta que o pensamento e a linguagem se fundem, formando a significação da palavra, estabelecendo uma unidade cujo seus componentes, pensamento e linguagem, não podem ser decompostos.



[...] uma unidade indecomponível de ambos os processos e não podemos dizer que ele seja um fenômeno da linguagem ou um fenômeno do pensamento. A palavra desprovida de significado não é palavra, é um som vazio. Logo, o significado é um traço constitutivo indispensável da palavra. (VIGOTSKI, 2010, p. 398)

Sendo assim, o sentido da palavra só é compreendido com um fenômeno de pensamento, na medida em que o pensamento está vinculado à palavra e nela materializado, ou quando o discurso está vinculado ao pensamento. Vigotski (2011) explica que a unidade entre a palavra e o pensamento se estabelece a partir do fenômeno do pensamento discursivo ou da palavra consciente. Nos estudos de Bakhtin (2006) sobre a linguagem, também encontramos a unidade indecomponível da linguagem e do pensamento:

É devido a esse papel excepcional de instrumento da consciência que *a palavra funciona como elemento essencial que acompanha toda criação ideológica, seja ela qual for*. A palavra acompanha e comenta todo ato ideológico. Os processos de compreensão de todos os fenômenos ideológicos (um quadro, uma peça musical, um ritual ou um comportamento humano) não podem operar sem a participação do discurso interior. Todas as manifestações da criação ideológica – todos os signos não verbais – banham-se no discurso e não podem ser nem totalmente isoladas nem totalmente separadas dele. (BAKHTIN, 2006, p.36, grifo do autor.).

Vigotski (2011, p. 484) explana que “[...] a relação entre o pensamento e a palavra é um processo vivo de nascimento do pensamento na palavra. Palavra desprovida de pensamento é, antes de tudo, palavra morta”. E aborda que sua investigação leva ao limiar de outro problema mais vasto – a questão da consciência.

Se a consciência, que sente e pensa, dispõe de diferentes modos de representação da realidade, estes representam igualmente diferentes tipos de consciência. Por isso o pensamento e a linguagem são a chave para a compreensão da natureza da consciência humana. (VIGOTSKI, 2010, p.485)

Bakhtin (2006) ressalta, também, a importância de observarmos os sentidos manifestados nas palavras como um elemento que compõem a compreensão das relações humanas, pois a palavra é entendida como signo ideológico. Esse autor, afirma que:

[...] As palavras são tecidas a partir de uma multidão de fios ideológicos e servem de trama a todas as relações sociais em todos os domínios. É, portanto claro que a palavra será sempre o indicador mais sensível de todas as transformações sociais, mesmo daquelas que apenas despontam que ainda não tomaram forma, que ainda não abriram caminho para sistemas ideológicos estruturados e bem formados. (...) A palavra é capaz de registrar as fases transitórias mais íntimas, mais efêmeras das mudanças sociais. (BAKHTIN, 2010, p. 40)

Desse modo, a importância das significações das palavras no processo da aprendizagem docente evidencia o que Vigotski expõe na analogia: “*A consciência se reflete na palavra, como o sol em uma gota de água.*” (VIGOTSKI, 2000, p. 294). É notória a importância da palavra e o seu significado no processo da aprendizagem docente, e Nascimento (2014) também enfatiza essa questão ao afirmar que,

A palavra [...] foi assumindo enorme importância para o homem, ao ponto de ser um sinal predominante dentro dos sistemas de sinalização que compreendem a realidade, ou melhor, dentro do quadro da formação dos índices da realidade no processo de adaptação e evolução humana ao meio circundante, porém, no âmbito do pensamento abstrato. (NASCIMENTO, 2014, p. 166)

Sendo assim, a aprendizagem docente na perspectiva histórico-cultural passa pela necessidade de conhecer alguns conceitos que potencializam a atuação docente, como Mediação e Atividade, entre outros. Utilizaremos esses termos a partir do posicionamento teórico explicitado pelos estudos advindos desta perspectiva.

Esses conceitos são aprofundados nos estudos da pesquisadora Bernardes (2006) e do pesquisador Nascimento (2014), pesquisas essas que investigaram o conceito de Mediação e suas relações com o processo educativo. Bernardes ressalta em sua pesquisa, a linguagem como atividade. Afirma que:

Como atividade, a linguagem deve ser entendida como uma unidade molar presente na organização das ações e operações do homem com a realidade objetiva. Como instrumento, identifica a presença de características essencialmente humanas por possibilitar ao homem apropriar-se das elaborações históricas e culturais da sociedade, humanizando o próprio homem e, ao mesmo tempo, transformando a sua própria constituição e conduta. (BERNARDES, 2006, p. 158)

Bernardes (2006) manifesta a relevância do educador em entender o conceito presente na palavra mediação. Segundo ela, as ações específicas do professor são derivadas de mediações:

[...] a apropriação de tais conhecimentos se constitui como instrumentos que medeiam o processo de intervenção pedagógica promovido pelo educador no campo da linguagem ao longo do movimento dialógico dos conceitos presente na atividade orientada para o ensino e aprendizagem no contexto escolar. (BERNARDES, 2006, p. 156)

O conceito de mediações, exposto por Bernardes (2016) no plural, deriva dos diversos instrumentos que ancoram as ações do docente na organização do ensino, considerando como um desses instrumentos o conhecimento teórico, que medeiam o processo de ensino e a transformação da ação na atividade pedagógica.

Desse modo, a palavra mediação ultrapassa o significado do senso comum, o qual define a mediação como uma ação centrada na atitude do professor que se coloca como um facilitador da aprendizagem. Nascimento (2014) aponta em sua pesquisa a complexidade de compreender o conceito de mediação na teoria histórico-cultural e alerta:

Para compreender essa mediação na teoria histórico-cultural é preciso examinar três temas ou conceitos fundamentais de estudo que a teoria levanta: “*o conceito de função psíquica superior, o conceito de desenvolvimento cultural da conduta e o domínio dos próprios processos de comportamento*” (VYGOTSKI, 1930/1995b, p. 19, grifo no original). Junto a esses temas, visualizar o papel do estímulo-signo na

vida humana. Esses fatores somados compreendem a explicação da mediação na teoria histórico-cultural. (NASCIMENTO, 2014, p. 141)

Vigotski assinala a importância de compreendermos cada conceito tomado como uma célula, pois para ele a “célula deve ser tomada com todas as suas ramificações através das quais ela se entrelaça com o tecido comum” (VIGOTSKI, 2000, p. 294).

A apropriação pelo docente de conceitos favorecerá a organização do ensino, visto que o sujeito encontra um sistema de significação elaborado historicamente e apropria-se dele como se apropria dos instrumentos.

Esse movimento de apropriação de conceitos esteve presente no desenvolvimento da pesquisa em questão, a qual partiu da premissa que na Teoria Histórico-Cultural a palavra e sua significação estabelecem uma *unidade* do pensamento e da linguagem. No decorrer da pesquisa, essa *unidade* foi se materializando no discurso da pesquisadora e dos docentes participantes. Isso constituiu um dos elementos que influenciaram o desenvolvimento do pensamento teórico, pois houve a superação da compreensão superficial da palavra para compreendê-la em sua essência.

## 1.4. Teoria da Atividade

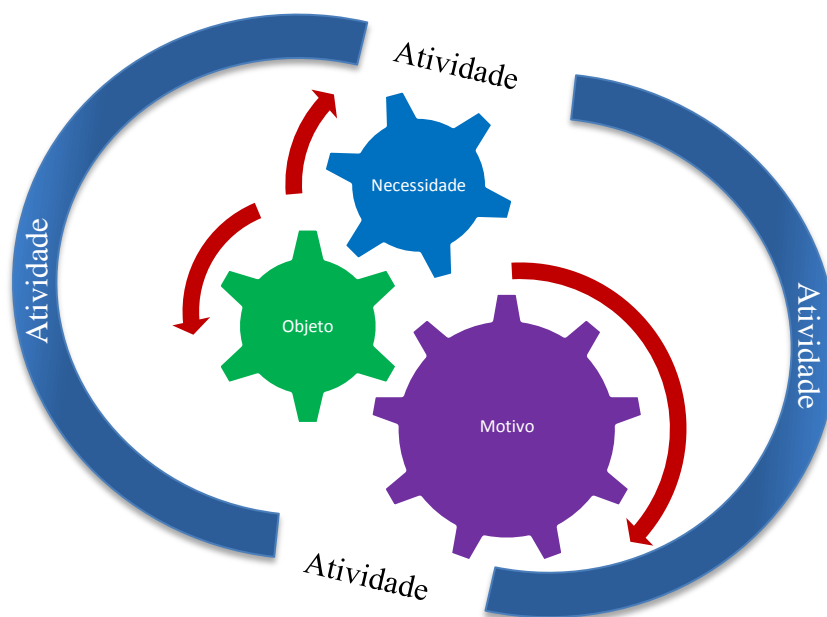
Compreender as relações entre aprendizagem e ensino na teoria histórico-cultural implica compreendê-los como processos culturais, históricos e que são sempre mediados pela atividade humana. Atividade aqui compreendida a partir da definição de Leontiev (1978):

A atividade é uma necessidade. Todavia, em si, a necessidade não pode determinar a orientação concreta de uma atividade, pois é apenas no objeto da atividade que ela encontra a sua determinação: deve, por assim dizer, encontrar-se nele. Uma vez que a necessidade encontra a sua determinação no objeto (se “objetiva” nele), o dito objeto tornar-se motivo da atividade, aquilo que o estimula. (LEONTIEV, 1978, p.115)

No conceito de atividade se faz necessário compreender os processos de apropriação da cultura humana e o papel do trabalho coletivo na constituição dos sujeitos. Leontiev (1978) afirma que a necessidade se materializa no objeto, tornando-o motivo da atividade. A atividade humana como cita Leontiev:

[...] só toma um significado nas condições do trabalho coletivo. São elas que conferem a esta ação o seu sentido humano e racional. Com a ação, esta “unidade” principal da atividade humana, surge assim “a unidade” fundamental, social por natureza, do psiquismo humano, o sentido racional para o homem daquilo para que a sua atividade se orienta. (LEONTIEV, 1978, p.78)

O conceito de atividade tem como força motriz a necessidade, o objeto e o motivo. Engrenagem que compõem a atividade, simbolizando o movimento e a ação da atividade do sujeito.



**Figura 1 - Força motriz do conceito de atividade.**

Esta relação específica se estabelece no decurso do desenvolvimento da atividade projetada no sentido consciente do sujeito. Segundo Leontiev:

[...] este sentido consciente é criado pela relação objetiva que se reflete no cérebro do homem, entre aquilo que o incita a agir e aquilo para o qual a sua ação se orienta como resultado imediato. Por outras palavras, o sentido consciente traduz a relação do motivo ao fim. (LEONTIEV, 1978, p. 97)

O sujeito está em atividade, quando mobiliza uma ação por meio de operações para alcançar um objetivo que está de acordo com o motivo daquela ação. “Somente quando o objeto corresponde à necessidade, esta pode orientar e regular a atividade” (ASBAHR, 2005, p. 109). Se o objeto não estiver de acordo com o motivo, o sujeito estará realizando apenas uma ação, desconexa com a sua necessidade, é o fazer sem a atribuição de sentido. A atividade surge no seguinte movimento: a necessidade encontra um objeto, e da articulação da necessidade e do objeto que gera o motivo. Nesse movimento constante da necessidade, do objeto e do motivo que reside à atividade.

Para Leontiev toda atividade deve partir de uma necessidade, e as ações desenvolvidas revelam que o objeto e o motivo da atividade devem coincidir. Pois, o conhecimento é constituído nas relações dos sujeitos com o meio e com os outros. Ou seja, o conhecimento é estabelecido na relação intersubjetiva, do coletivo social, para o intrapsíquico, apropriação do conceito pelo indivíduo (VIGOTSKI, 2001). Manifesta assim, os preceitos da teoria da atividade, desta forma, entende-se que o desenvolvimento humano cultural e psíquico não ocorre de forma natural, e não depende somente do desenvolvimento biológico, mas é mediado culturalmente dentro do meio social, concebendo dessa forma a aprendizagem como uma ação intencional (LEONTIEV, 1978). Podemos indicar a estreita relação do desenvolvimento histórico da sociedade ao desenvolvimento das ações educacionais, pois nessa relação manifesta-se a importância da intencionalidade na educação, como descreve Leontiev (1978):

As aquisições do desenvolvimento histórico das aptidões humanas são simplesmente *dadas* aos homens nos fenômenos objetivos da cultura material e espiritual que os encarnam, mas são aí apenas *postas*. Para se apropriar destes resultados, para fazer deles *as suas* aptidões, “os órgãos da sua individualidade”, a criança, o ser humano, deve entrar em relação com os fenômenos do mundo circundante através doutros homens, isto é, num processo de comunicação com eles. Assim, a criança *aprende* a atividade adequada. Pela sua função, este processo é, portanto, um processo de *educação*. (LEONTIEV, 1978, p. 272, grifos do autor).

Desta forma a atividade humana, como um processo intencional, projeta-se nas ações educacionais como processo de propagação e a apropriação da cultura e é produzida historicamente. Para que cada indivíduo possa herdar todo esse conhecimento, se faz necessário entrar em contato com os fenômenos do mundo, o qual está inserido através das mediações sociais e por intermédios dos signos mediadores. (LEONTIEV, 1978). Duarte (2001) ressalta que “cabe ao ensino escolar, portanto, a importante tarefa de transmitir à criança os conteúdos historicamente produzidos e socialmente necessários” (DUARTE, 2001, p. 98). O desafio da atividade pedagógica é de tornar o ensino e a aprendizagem significativa para os educandos e para os docentes, ou seja, aquela que não fique apenas no empírico, mas que abstraia para o conhecimento teórico a fim que seja possível a resolução de problemas da realidade, do grupo social. Pois, a educação é o processo de transmissão e construção dos conhecimentos produzidos historicamente pela humanidade aos sujeitos, a partir das necessidades e questionamentos humanos, transformando o sujeito em um humano-histórico.

A atividade de ensino é apresentada por Moura (2010, p. 82) “como um modo de realização da educação escolar”, sendo por meio dela que os conhecimentos produzidos

historicamente pela humanidade podem ser apropriados pelos sujeitos de forma sistematizada, organizada, com finalidades predefinidas. Conforme Moura (2010):

Na natureza particular da atividade de ensino, que é a máxima sofisticação humana inventada para possibilitar a inclusão dos novos membros de agrupamento social em seu coletivo, dará a dimensão dos que fazem a escola como espaço de aprendizagem e apropriação da cultura humana elaborada (...). (MOURA, 2010, p. 82)

Compreendendo assim, que a atividade de ensino é própria do professor e deve satisfazer a necessidade deste em ensinar os conhecimentos produzidos historicamente aos seus educandos e por meio da atividade de aprendizagem devem sentir a necessidade de aprender aquele conceito.

Nesta perspectiva, a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem, aqui entendida “no sentido de uma aprendizagem que decorre de uma atividade de ensino (...) intencional, sistematizada e organizada, que objetiva à formação do pensamento teórico.” (MOURA, 2010, p. 87), devem satisfazer a necessidade de ensinar e aprender, de forma dialética, a necessidade coincida com o motivo, de forma que o docente entre em atividade de ensino no momento que organiza o ensino, e o educando quando se apropria do conceito proposto e, dessa forma, consiga estabelecer conexões com a realidade por meio da atividade de aprendizagem.

Moretti diz que:

[...] dentro do referencial histórico-cultural, o conhecimento só é possível na práxis, entendendo essa última como atividade teórico-prática transformadora, acreditamos que organizar o ensino a partir dos pressupostos da Teoria da Atividade pode contribuir para a produção coletiva – alunos, professores, gestores, formadores de professores – de uma educação humanizadora que considere os conhecimentos como objetivações humanas e, por isso mesmo, só possível de serem apropriados pelos sujeitos por meio da atividade humana. (MORETTI, 2007, p. 92)

O conceito de atividade permite ao professor, fundamentado pela prática e alimentado pela teoria (MORETTI, 2007), superar a alienação do seu trabalho e desta forma ao agir, o docente é capaz de transformar a realidade e ao mesmo tempo transformar-se. Essa práxis pedagógica permite ao professor refletir sobre sua prática definindo quais serão as melhores formas de desenvolvimento de sua ação.

Essa perspectiva teórica possibilita compreender a aprendizagem docente como processo de tomada de consciência do sujeito sobre sua atividade de ensino, provendo assim, mudanças significativas na prática docente que só são possíveis por meio da transformação do sentido atribuído pelo sujeito às suas ações em atividade (MORETTI e MOURA 2010). Movimento que se constituirá como a superação de um pensamento empírico para o desenvolvimento do pensamento teórico, tema que será abordado no item a seguir.

## 1.5. Desenvolvimento do Pensamento Teórico

Vasili Vasilievich Davidov (1930 – 1998) é um dos continuadores da teoria histórico-cultural pertencente à terceira geração de psicólogos russos e soviéticos. Sua pesquisa priorizou o desenvolvimento humano e a aprendizagem escolar e congregou com toda responsabilidade profissional, o grande legado conceitual de Vigotski, Lúria, Leontiev, Galperin e Elkonin, dentre outros. Conforme destaca Libâneo e Freitas (2013):

[...] Davydov ao longo de quase 25 anos de pesquisa nas escolas russas visando formular uma teoria do ensino voltada para o desenvolvimento do pensamento das crianças e jovens [...]. Foi esse seu programa e pesquisa ao longo de sua vida, baseando seus trabalhos na tradição da teoria histórico-cultural fundada por Vygotsky e desenvolvida por Luria, Leontiev, Galperin, Elkonin, Zaporjets, entre outros colaboradores. É sabido que Davydov foi o mais destacado pesquisador em psicologia pedagógica da terceira geração dessa notável escola científica. (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 315).

Aqui nos atentaremos a discutir o que Davidov contempla em seu estudo sobre o pensamento, a consciência, a estrutura da atividade e em especial o estudo sobre a classificação do pensamento humano em: pensamento empírico e pensamento teórico.

Davidov (1988), assim como seus antecessores, ressalta que o trabalho é a principal base do conhecimento humano, sendo considerada por ele a atividade objetual-prática. E destaca a importância de o professor compreender o seu trabalho como atividade principal, pois de acordo com Davidov (1982) ao conceber a realidade em forma de conceito, caminhamos em direção ao pensamento teórico. Como afirma Davidov

O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetivo-prático, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como peculiar experimento objetivo-sensorial. Logo, este experimento adquire cada vez mais, um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passarem, com o tempo, a realizar os experimentos mentalmente. (DAVÍDOV, 1988, p. 125)

Quando o professor toma consciência da fundamental importância de suas ações docentes, acontecem mudanças essenciais da atividade surgindo à possibilidade da transformação no tipo de pensamento. Deste modo, o pensamento empírico pode dar lugar ao pensamento teórico uma vez que esse movimento relaciona-se à análise do processo de formação de sua atividade e de sua consciência (DAVIDOV, 1988). Como afirma Rosa (2012):

As fontes da consciência estão na relação do homem com a realidade, em sua vida social. Esta constitui a fonte das formas mais complexas da atividade consciente do ser humano. Em cada estágio de desenvolvimento lhe é inerente uma atividade principal e sobre essa base surgem e se formam novas estruturas psicológicas. (ROSA, 2012, p. 41)

Estudos como de Catalani (2002), Bernardes (2006), Moretti (2007), Rosa (2012), Amorim (2015) apresentam alguns elementos que são extremamente importantes na realização das ações docentes, sendo um deles o trabalho pautado na organização do ensino e o domínio dos conhecimentos específicos acerca do trabalho que exerce. Como aponta Souza e Resende (2013, p. 07) “Na sociedade, o professor é quem assume essa tarefa de ser o organizador do processo educacional ao idealizar as atividades de ensino de forma intencional e é, nesse sentido, que o espaço escolar passa a ser valorizado nessa abordagem”.

Como destaca Davidov, em seus estudos, a apropriação do pensamento teórico possibilita ao sujeito condições de compreender novos significados para o seu meio podendo modificar a sua realidade e permitindo a ele, transformar a forma e o conteúdo do seu pensamento. Caminho que o professor deve percorrer para que ocorra a mudança no tipo de pensamento, do pensamento empírico para desenvolver o pensamento teórico.

Davidov (1988) descreve o pensamento empírico como o processo de pensamento que se limita:

1) À comparação dos dados sensoriais concretos com a finalidade de separar os traços formalmente gerais e realizar sua classificação; 2) à identificação dos objetos sensoriais concretos com finalidade de sua inclusão em uma ou outra classe. (DAVÍDOV, 1988, p. 105)

Rosa, Moraes e Cedro (2010), afirmam que:

O pensamento empírico possibilita ao sujeito uma atividade cognitiva que lhe assegure a separação dos atributos dos objetos ou fenômenos e sua designação, incluindo aí aqueles que em determinado momento não são possíveis de serem observados e que somente podem ser conhecidos indiretamente por meio de deduções. (ROSA, MORAES e CEDRO, 2010, p. 73)

Davidov (1988), em seus estudos salienta que o conhecimento teórico deve ser considerado como a principal questão da atividade de aprendizagem. Os sujeitos se apropriam do conhecimento teórico durante a realização dos diferentes tipos de atividades de aprendizagem nas quais estão inseridos. No caso dos professores, ocorre durante a atividade de ensino. Para esse autor, a definição do pensamento teórico, como frisam Rosa, Moraes e Cedro (2010) que dentro dessa perspectiva:

[...] os conceitos surgem não como simples representações gerais, mas sim como um modo de atividade psíquica do sujeito, que permite a ele a reprodução do objeto idealizado e, conseqüentemente, do seu sistema de relações, o qual na sua unidade reflete a universalidade ou a essência do movimento do objeto ou fenômeno. Portanto, o conceito constitui ao mesmo tempo a forma do reflexo do objeto e o meio da sua reprodução e estruturação mental. (ROSA, MORAES e CEDRO, 2010, p. 75).

Davidov (1988) caracteriza os pensamentos empíricos e teóricos do seguinte modo:



Principais características dos tipos de pensamento	
Pensamento Empírico	Pensamento Teórico
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se materializa através de escolha de exemplos relativo à certa classe formal;</li> <li>• Elaborados por meio da comparação dos objetos as suas representações, tendo apenas importância às propriedades comuns dos objetos;</li> <li>• Fundamenta-se na observação dos objetos;</li> <li>• A propriedade formal comum é comparável as propriedades dos objetos;</li> <li>• Generalização formal das propriedades dos objetos permite situar os objetos específicos no interior de cada classe formal;</li> <li>• Representações concretas dos objetos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transformação do saber em teoria desenvolvida através de dedução e explicação;</li> <li>• Elaboração por meio da análise do papel e da função de certa relação entre as coisas no interior de um sistema;</li> <li>• Expressão por diferentes sistemas semióticos;</li> <li>• Fundamenta-se na transformação dos objetos;</li> <li>• Apresentação de uma forma universal que caracteriza simultaneamente um representante de uma classe e um objeto particular;</li> <li>• Relação entre o geral e o particular;</li> <li>• Representa a relação entre as propriedades do objeto e as suas ligações internas.</li> </ul>

Quadro 1 - Principais características dos tipos de pensamento a partir de Davidov (1988).

Davidov (1988) apresenta essas características do pensamento empírico e do pensamento teórico em seu estudo e destaca que o pensamento teórico está estritamente relacionado aos conceitos científicos e seu objeto são a integridade e a compreensão do sistema. O pensamento teórico objetiva a ascensão do abstrato ao concreto. Já no pensamento empírico, funciona mediante a identificação dos objetos sensoriais concretos e a comparação dos dados sensoriais concretos, ou seja, está voltado para a exteriorização e classificação dos

objetos. Além disso, ressalta que a educação escolar deve ter como objetivo central desenvolver o pensamento teórico, o que assim, daria outra dimensão para pensamento empírico. No caminho da concretização desse objetivo Rosa (2012) enfatiza que:

Davidov (1998) alerta para que o enfoque teórico não seja identificado como abstrato e o empírico como concreto. As relações entre ambos são bem mais complexas e exigem maior aprofundamento. Nesse sentido, Davidov e Markova (1987) e Davidov (1982) tratam de explicitar as diferenças cruciais entre as duas abordagens. O conhecimento empírico se elabora por meio da comparação de objetos e das suas representações, o que permite a separação das propriedades iguais, comuns. Em tal comparação separa-se a propriedade formalmente geral, cujo conhecimento permite catalogar objetos individuais, soltos em uma determinada classe formal, independentemente de estes objetos estarem, ou não, relacionados entre si. (ROSA, 2012, p. 49)

Davidov (1988) relata que a melhor maneira de desenvolver o pensamento teórico nos sujeitos, de forma intencional e orientada, é no ambiente escolar quando o docente põe em prática um ensino que promove o desenvolvimento dos conceitos científicos e vise à superação da escola tradicional, que Davidov (1987, 1988) caracteriza como sendo aquela dominada pelos métodos intuitivos, cujos conhecimentos estão apenas vinculados à dimensão utilitária e empírica. E também alerta sobre o pensamento desenvolvido nesse tipo de escola:

[...] tem um carácter classificador, catalisador e assegura a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e os traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e da sociedade. Tal orientação é indispensável para fazeres cotidianos, durante o cumprimento de ações laborais rotineiras, porém é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo em face da realidade. (DAVIDOV, 1987, p. 144)

Ressalta assim, a importância da organização do ensino que favoreça o desenvolvimento do pensamento teórico de todos os atores envolvidos no processo educacional.

Diante desse processo do desenvolvimento do pensamento teórico explicitada por Davidov, podemos relacioná-lo à aprendizagem docente, que tem um importante papel na Educação, principalmente na organização do ensino. A sua atuação docente pode ser caracterizada pelos elementos listados por Moura et al. (2010), com a intenção da superação das relações espontâneas do indivíduo. Para isso, é preciso:

- Compreensão da essência coletiva da atividade humana.
- Percepção de que o homem aprende com todos os sentidos e que se torna homem ao compartilhar com os outros os sentidos e significados.
- Concepção de que o conhecimento é historicamente construído e, portanto, está sendo feito e refeito a todo o momento.
- Compreensão de que a organização do ensino exige, não por questões burocráticas e administrativas, o planejamento da atividade de ensino, o registro e a sua avaliação, mas sim por estes serem ingredientes imprescindíveis para uma atividade educativa direcionada ao desenvolvimento significativo dos indivíduos.

- Compreensão da necessidade de o professor se colocar em um movimento crítico de busca pelo sentido para a sua atividade docente. (MOURA et al, 2010, p.162)

A importância da organização do ensino pode ser compreendida a partir dos estudos de Vigotski (2001), quando o autor afirma que a aprendizagem não é em si mesma o desenvolvimento, mas uma correta organização da aprendizagem do indivíduo é que conduz ao desenvolvimento psíquico e a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolvam no indivíduo as características humanas não naturais, mas formadas historicamente.

E a atividade docente se constitui nesse processo de organização do ensino, pois como ressalta Rosa (2012) em seus escritos,

O percurso da atividade é condicionado pela lógica objetiva das tarefas a executar pelo homem. Uma tarefa é uma unidade de uma meta e as condições para atingi-las (RUBINSTEIN<sup>4</sup>, 1960). Estabelecer uma tarefa para um indivíduo é determinar uma meta a ser atingida em condições específicas. (ROSA, 2012, p. 40)

Rosa (2012) manifesta assim, o desafio do professor em organizar o ensino, superando uma organização fundamentada apenas no conhecimento empírico para uma organização do ensino que favoreça desenvolvimento do pensamento teórico, visto que esse processo se inicia no movimento da aprendizagem docente.

Podemos destacar duas pesquisas, Moraes (2008) e Ribeiro (2011), que investigam a formação do pensamento teórico no movimento da aprendizagem docente, as quais explicitam o desenvolvimento dos elementos constituintes do pensamento teórico apresentados nos estudos de Davidov (1988): a análise, reflexão e planificação teórica das ações.

Moraes (2008) apresenta como problema central de sua pesquisa a necessidade de avaliar o processo de apropriação dos conhecimentos matemáticos em movimento no desenvolvimento do pensamento teórico, buscando compreender a intervenção pedagógica como promotora do desenvolvimento humano, função essencial da escola. Ribeiro (2011) investiga a apropriação de elementos constitutivos de um modo geral de organização do ensino por futuros professores de matemática no desenvolvimento das disciplinas de Prática de Ensino e de Estágio. Ambas as pesquisas apresentam evidências do movimento da aprendizagem docente por meio dos seguintes elementos: análise, reflexão e planificação teórica das ações, no desenvolvimento do pensamento teórico.

---

<sup>4</sup> RUBINSTEIN, S. L. El ser y la consciencia. Montevideo: ediciones Pueblos Unidos, 1960.

Tomando como referencia as pesquisas de Ribeiro (2011) e Moraes (2008) nossa investigação também evidenciará o movimento de análise, reflexão e planificação no desenvolvimento do pensamento teórico, podendo ser observada durante as situações desencadeadoras de aprendizagem estruturadas na organização do ensino de frações.

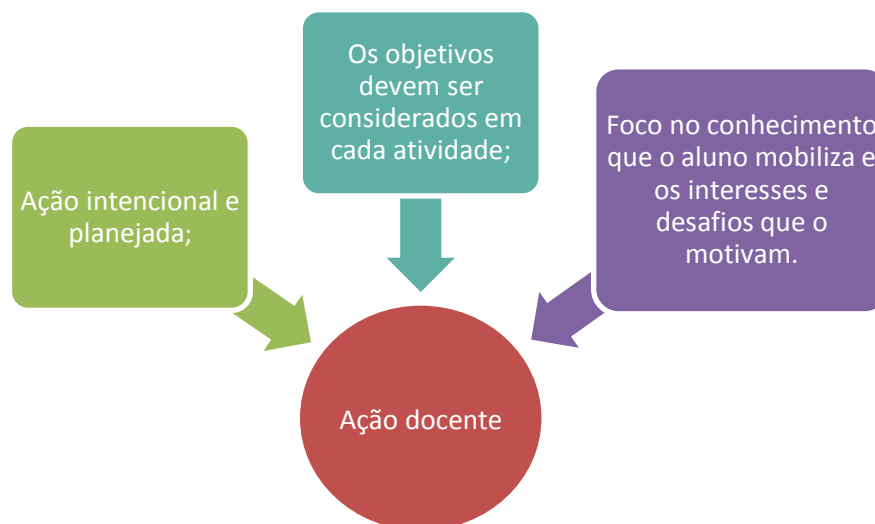
### **1.6. Atividade Orientadora de Ensino: uma proposta teórica-metodológica para a organização do ensino.**

No ensino da matemática para o conceito de fração, adotamos como referência o conceito de Atividade Orientadora de Ensino (AOE) proposto por Moura (1996, p.4) entendida como “o conjunto articulado da intencionalidade do educador que lançará mão de instrumentos e de estratégias que lhe permitirão uma maior aproximação entre sujeitos e objeto de conhecimento”. A Atividade Orientadora de Ensino (AOE) tem como aporte teórico a Teoria Histórico-Cultural e a Teoria da Atividade, compreendida como uma proposta teórica-metodológica para orientar a atividade do professor e do aluno.

Conforme Moura (1996), a AOE pode contribuir com o processo de aprendizagem da docência em Matemática ao indicar elementos que, uma vez considerados pelo professor na produção de situações desencadeadoras de aprendizagem, podem favorecer a aprendizagem dos educandos e explicitar para todos os sujeitos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem quais os elementos essenciais do conceito a ser ensinado.

Designamos por *atividade orientadora de ensino* a atividade que permite colocar a criança em situação de construção de um conhecimento matemático, que tenha um problema desencadeador da aprendizagem e que possibilite compartilhar significados na solução desse problema com características lúdicas [...] (MOURA, 2007, p. 63, grifos do autor).

A ação do professor, nessa perspectiva, deve estar relacionada a alguns princípios destacados por Rosa, Moraes e Cedro (2010), que estão estruturados nas seguintes características:



**Figura 2 - Ações docentes na perspectiva da AOE a partir de Moura (1996, 2010).**

A Atividade Orientadora de Ensino deve ser compreendida como uma proposta de organização da atividade de ensino e de aprendizagem que, sustentada pelos pressupostos da teoria histórico-cultural, se apresenta como uma possibilidade de realizar a atividade educativa tendo por base o conhecimento produzido sobre os processos humanos de construção de conhecimento (MOURA, 1996, 2001), tendo como características: necessidades, motivos, ações e operações, princípios que permitem que a AOE seja compreendida como elemento de mediação entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem, uma vez que A “AOE, enquanto mediação é instrumento do professor para realizar e compreender seu objeto de estudo: o processo de ensino de conceitos” (MOURA et al, 2010, p.227). O autor compreende que:

A atividade de ensino do professor deve gerar e promover a atividade do estudante, deve criar nele um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade. É com essa intenção que o professor organiza a sua própria atividade e suas ações de orientação, organização e avaliação. (MOURA et al, 2010, p. 213).

Os fundamentos teórico-metodológicos da AOE são indicadores de um modo de organização do ensino para que a escola cumpra sua função principal, que é possibilitar a apropriação dos conhecimentos teóricos. Moura (1996) apresenta a seguinte definição:

Atividade Orientadora de Ensino é o conjunto articulado da intencionalidade do educador que lançará mão de instrumentos e de estratégias que lhe permitirão uma maior aproximação entre sujeitos e objeto de conhecimento. (MOURA, 1996, p.04).

A AOE se apresenta como um conjunto de ações intencionais que podem estar estruturadas a partir dos seguintes elementos<sup>5</sup>: síntese histórica do conceito; recursos teórico-metodológicos do processo de apropriação do conceito; história virtual; jogos; situações emergentes do cotidiano; análise e síntese da solução coletiva.

A **síntese histórica do conceito** apresenta-se como uma proposta fundamentada em uma produção cultural que possibilita ao professor apropriar-se do aspecto pedagógico da história, desenvolvendo uma visão da construção dinâmica do conceito, compreendendo também a contribuição das relações sociais na criação e solução de problemas. O elemento denominado o **recursos teórico-metodológicos do processo de apropriação do conceito** constituem-se como elementos potencialmente mobilizadores dos sujeitos para a solução de um problema relativo aos conteúdos matemáticos.

A **história virtual** é compreendida como situações-problema colocadas por personagens de histórias infantis, lendas ou da própria história da matemática como desencadeadoras do pensamento da criança de forma a envolvê-la na produção da solução do problema que faz parte do contexto da história. Dessa forma, contar, realizar cálculos, registrá-los poderá tornar-se para ela uma necessidade real. Os **jogos** também podem compor uma das ações da AOE, ele tem como intenção evidenciar um conceito matemático. Os jogos podem ser extraídos também do meio cultural ou adaptados de modo a suscitar respostas em que a matemática se faz presente.

As **situações emergentes do cotidiano** são formadas por questões ou observações que emergem das relações estabelecidas pelas crianças no cotidiano escolar. O elemento **análise e síntese da solução coletiva, mediada pelo educador**, pode ocorrer simultaneamente com os demais elementos já apresentados, pois durante uma determinada ação que compõe a AOE o professor como mediador deve estar atento ao desempenho dos estudantes, para que seja possível a cada um apropriar-se do conceito em sua forma mais elaborada, mediante a interação entre todas as crianças do grupo.

Partindo dessa proposta teórico-metodológica é que essa pesquisa objetiva responder como a organização do ensino da matemática influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática. No entanto,

---

<sup>5</sup> Elementos da AOE apresentados por Moura, Manoel Oriosvaldo. Controle da variação de quantidades. Atividade de ensino. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1996.

como já abordado nesse capítulo, a organização do ensino passa pela necessidade do docente conhecer o conceito que irá abordar com seus estudantes. No caso da nossa pesquisa, o recorte é o conceito de fração, o qual será discutido no próximo capítulo.

## 2. O CONCEITO DE FRAÇÕES

A partir da questão que move essa pesquisa, ou seja, *como a organização do ensino do conceito de Fração, a partir das contribuições da Teoria histórico-cultural e da Atividade Orientadora de Ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática no quarto e quinto ano do ensino fundamental*, temos por objetivo neste capítulo aprofundar algumas referências sobre o conceito de frações a partir das contribuições da teoria histórico-cultural.

A partir de relatos históricos (CARAÇA, 1989) podemos afirmar que as primeiras ideias de números racionais na sua representação fracionária surgiram da necessidade humana de medir. Tomando as premissas da perspectiva histórico-cultural já apresentadas no capítulo anterior, torna-se fundamental ao professor considerar tal contexto histórico ao planejar o ensino do conceito de fração. Segundo Rosa et al. (2013), é fundamental que o professor planeje atividades para desenvolver o conceito com a base teórica histórica, significando-o aritmeticamente, algebricamente e geometricamente. É, portanto, importante que o aluno construa e observe a transformação da sociedade e da tecnologia durante o desenvolvimento humano, vislumbrando a necessidade de aprimorar a notação, a representação e os instrumentos, para concluírem a forma atual que estes se apresentam, bem como sua necessidade social. Como afirma Moretti (2007):

[...] compreender a essência das necessidades que moveram a humanidade na busca de soluções que possibilitaram a construção social e histórica dos conceitos é parte do movimento de compreensão do próprio conceito. (MORETTI, 2007, p. 97)

Tendo como base teórica a Teoria da Atividade, na qual a necessidade deve coincidir com o motivo para, dessa forma, ocorrer à aprendizagem do conceito, os estudantes, ao perceberem a necessidade e vincular a produção historicamente produzida com situações da realidade, vão se apropriar do conceito conseguindo resolver situações que a vida em sociedade exige. Ao mesmo tempo, ao refletir coletivamente sobre a necessidade humana que produziu o conceito e seus efeitos na vida social, o professor estará abordando o conteúdo de forma humanizadora e crítica, construindo o conteúdo junto de seus alunos, possibilitando, dessa forma, o desenvolvimento do pensamento teórico.

Entender a matemática como um conhecimento que a humanidade se apropriou ao longo da história permite-nos repensar como devemos ensinar. Segundo Moura (1996):



A matemática não é uma produção linear, não surgiu de imediato como um corpo de conhecimento formalmente organizado, mas foi e continua sendo elaborada em diferentes contextos históricos na interação do homem com o ambiente físico e cultural para atender as suas múltiplas necessidades. (MOURA, 1996, p.01)

## 2.1. A História das Frações e seus Registros


Segundo o matemático Ifrah (2010) uma grande invenção, uma descoberta só se desenvolve se vem atender à necessidade social de uma civilização. Tal afirmação é materializada no modo como, na antiguidade, a necessidade humana foi aprimorando as Frações.

As frações não foram consideradas desde a sua origem como números; nem se concebia a noção de fração geral  $m/n$ , como  $m$  vezes o inverso de  $n$ . Os egípcios, por exemplo, só conheciam as frações denominadas “unitárias” (as de denominador igual a 1) e só exprimiam as frações ordinárias através das somas de frações desse tipo (por exemplo:  $7/12 = 1/3 + 1/4$ ). (IFRAH, 2010, p. 326)

Boyer (1974) apresenta em seus estudos, os primeiros indícios históricos da invenção das Frações:

O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo. (BOYER, 1974, p. 4)

Há mais de três milênios e meio, uma quantidade pequena de papiros egípcios resiste ao desgaste do tempo, revelando-se um dos mais extensos documentos da antiguidade e contendo informações matemáticas importantíssimas: o chamado *Papiro de Ahmes* provém de um protótipo do Reino do Meio, de cerca de 2000 a 1800 a.C e uma das informações contidas nesse papiro lendário são inscrições hieroglíficas egípcias acerca da notação especial para as frações unitárias.

A fração unitária egípcia era representada por um hieróglifo, semelhante a uma boca, que indicava Parte (ROONEY, 2012). Dessa forma, para representar as frações utilizava-se o símbolo  acompanhado dos símbolos numéricos.

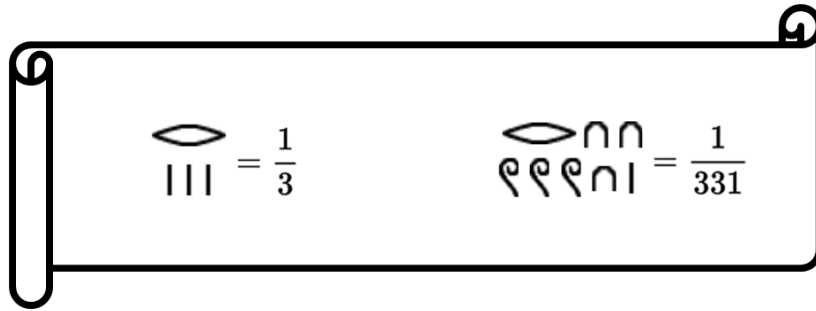


Figura 3 - Representação hieroglífica das frações egípcias. Baseado em Ifrah (2010).

O uso das frações unitárias egípcias persistiu na Grécia e na Roma até boa parte do período medieval.

O progresso da fração necessitou de um tempo histórico e da contribuição de povos antigos até serem capazes de unificar a noção de fração e construir um sistema coerente para suas unidades de medidas (IFRAH, 2010).

A fração passou pelo aperfeiçoamento de algumas civilizações, entre elas, os babilônios, os gregos, os hindus e árabes. A seguir apresentaremos algumas das contribuições dessas antigas civilizações ao conceito de frações.

#### Babilônios

**Foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional**

Mas, não chegaram ao uso da “vírgula” para diferenciar os inteiros das frações sexagesimais da unidade. Eles não tinham um símbolo para representar a separação entre valores inteiros e os fracionários, dessa forma, a diferenciação só eram possíveis pelo contexto.

#### Gregos

**Tentaram atribuir uma notação geral às frações ordinárias**

Mas, sua numeração alfabética não se adequava a simbolização, o que levou a civilização grega desistir de adotar a notação sexagesimal em seus cálculos.

#### Hindus

**Devemos a eles a notação moderna das**

Devido a sua numeração decimal de

<b>frações.</b>	posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração como 14/ 165 (14 sendo considerado numerador e 165 denominador.)
<b>Árabes</b>	
<b>Os Árabes aperfeiçoaram inventando a famosa barra horizontal <math>\frac{a}{b}</math>.</b>	Em seguida, são descobertas as frações denominadas decimais, foi pouco a pouco ampliando o interesse da civilização árabe em prolongar a numeração decimal, isto é a representação dos números “depois da vírgula”.

**Tabela 1 – As contribuições de antigas civilizações para as frações a partir de IFRAH (2010).**

A representação fracionária nos moldes que conhecemos hoje teve um longo trajeto histórico. Na obra-prima *Brahma-sphuta-siddhanta* do matemático indiano Brahmagupta, escrito no ano 628 d. C, apresenta o uso da barra dividindo o numerador do denominador como um método hindu de escrever a fração. Conforme já citado no quadro anterior, os gregos deram continuidade a essa forma de representação  $\frac{n}{d}$  das frações. Rooney (2012), em sua pesquisa, relata que “O primeiro matemático europeu a usar a barra de frações da forma como ela é usada hoje foi Fibonacci (c. 1170-1250)” (ROONEY, 2012, p.32).

Esse movimento de produção das frações teve a contribuição de diversos matemáticos da Idade Moderna. Em 1582, o belga Simon Stévin ao adotar a menção da ordem das frações decimais consecutivas na Europa, representou 12,357 da seguinte forma:

12(0) 3(1) 5(2) 7(3)
----------------------

Representado dessa forma: 12 unidades inteiras, 3 unidades decimais da primeira ordem ou décimos, 5 unidades decimais de segunda ordem ou centésimos, e 7 unidades decimais da terceira ordem ou milésimos (IFRAH, 2010). No entanto, essa representação foi contestada dez anos depois pelo suíço Jost Bürgi que simplificou eliminando a menção da indicação da ordem das frações decimais consecutivas, e introduziu o símbolo °:

° 12 357
-------------

Em seguida, o italiano Magini trocou o símbolo  $\circ$  pelo ponto colocado entre os algarismos das unidades e o das dezenas **12.257**. Desse modo, surgiu a notação utilizada, até hoje, nos países anglo-saxões.

Mais tarde, foi o neerlandês Wilbord Snellius no início do século XVII, que estabeleceu o uso da vírgula:

<b>12, 357</b>
----------------

Como destaca Ifrah (2010, p. 328), “as consequências desta racionalização da noção e da representação das frações foram incalculáveis em todos os domínios (...)”. Como, por exemplo, a invenção do sistema métrico e a simplificação nos cálculos.

A numeração decimal de posição assim concluída introduziu também a infinita complexidade do universo dos números, e levou os matemáticos a um avanço prodigioso. (IFRAH, 2010, p. 329)

Um desses avanços denomina-se “os números racionais”, que são os números inteiros naturais e as suas combinações mais simples as frações ordinárias.

## **2.2. Insuficiência dos Números Naturais**

De forma geral, podemos afirmar que os conceitos matemáticos produzidos pela humanidade surgiram da necessidade de sobrevivência e de preservação da espécie. O desenvolvimento humano esteve ligado ao trabalho de suprir as necessidades básicas de sobrevivência. Possibilitando desse modo, a criação e a apropriação de diversas ferramentas, sendo uma delas a matemática, que facilitaram o trabalho do homem ao longo da sua história.

Uma das demonstrações que a matemática surgiu de uma necessidade humana é o surgimento dos números. Registros históricos apontam que o homem sentiu a necessidade de contar e, para isso, utilizou desde as partes do corpo a objetos da natureza, até chegar aos números indo árabes conforme conhecemos hoje. Conforme Ifrah (2010) a história da matemática:

[...] é a história das necessidades e preocupações de grupos sociais ao buscar recensear seus membros, seus bens, suas perdas, seus prisioneiros, ao procurar datar a fundação de suas cidades e de suas vitórias utilizando os meios disponíveis, às vezes empíricos, como o entalhe, às vezes estranhamente mitológicos, como o caso

dos egípcios. E assim, fazendo, estes grupos manifestarem seus preceitos. (IFRAH, 2010, p. 10)

O desenvolvimento das antigas civilizações e do próprio ser humano viabilizou a criação de símbolos para facilitar a necessidade de contar, no entanto, outras imprescindibilidades ocorreram, como por exemplo, o medir. A necessidade de medir, assim como dos números, surgiu de uma necessidade real do homem. Conforme Heródoto citado por Caraça (1989) ao descrever o surgimento da geometria:

Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos. (HERÓDOTO apud CARAÇA, 1989, p. 32)

Como descrito sobre o nascimento da geometria, podemos identificar a necessidade de medir, pois medir e contar são ações presentes no cotidiano dos sujeitos. Reportando a situação narrada por Heródoto, a contagem numérica já não era suficiente para quantificar a divisão de terras egípcias. Reparemos na seguinte questão: De que forma a distribuição das terras do Egito foi realizada, uma vez que todos tinham que ficar com a mesma porção de terra para pagar seus tributos, considerando a inexistência de instrumentos de medida que conhecemos na atualidade?

Inicialmente o homem utilizava partes do próprio corpo para medir, tais como palmo, pés, braçada, que causava situações arbitrárias, incoerência e variáveis que só o contexto podia indicar a sua precisão - já que as partes do corpo tem variação de tamanho - então, chegaram à conclusão que deveriam estabelecer uma unidade de medida (padrão) e utilizaram, no primeiro momento, as partes do corpo do Faraó para estabelecer a padronização. Para medir os terrenos, como na passagem do Faraó Sesóstris narrado por Heródoto, os agrimensores utilizavam a corda como instrumento de medida e faziam a demarcação com nós periódicos, contendo a unidade de medida estabelecida - a medida do cúbito<sup>6</sup> do Faraó estirava-se a corda e contavam quantas vezes o cúbito cabia no comprimento do terreno.

Para Caraça (1989, p. 29), medir é “comparar duas grandezas da mesma espécie, dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc.”. De acordo com esta definição podemos dizer

---

<sup>6</sup> O cúbito é a medida do cotovelo, antebraço, até a ponta do dedo médio.

que para realizarmos uma medida, ou seja, para compararmos duas grandezas de mesma natureza precisamos estabelecer alguns critérios. Em primeiro lugar é preciso estabelecer qual é a unidade de medida e o melhor instrumento de medida para realizar a medição. No exemplo dado, fica inviável medir o terreno do Egito utilizando a polegada do faraó, portanto, utilizaram como unidade de medida o cúbito e como instrumento a corda com nós. Segundo Moretti e Souza (2010, p. 120) “a criação do instrumento depende da grandeza que mede e tem que ser da mesma grandeza a ser medida”.

Para medir então, é necessário estabelecer a unidade de medida e identificar quantas vezes esta unidade, grandeza, cabe dentro do que se quer medir.

Porém, podemos ter um caso de medida, como o exemplo dado da divisão das terras do Egito, onde a unidade de medida estabelecida não cabe de forma inteira no terreno, sobra ou falta um pedaço menor do que a grandeza estabelecida. Nesse caso, o que fazer? O enfrentamento desse conflito foi decisivo para se reconhecer que o campo dos números inteiros é insuficiente para medir grandezas contínuas, sendo necessária sua ampliação, criando-se então a subunidade (MORETTI; SOUZA, 2010).

A partir da necessidade humana de subdividir a unidade de medida estabelecida, estabelece-se a limitação do campo numérico dos naturais e surge a necessidade de sua expansão com o campo numérico dos racionais, que inclui as representações fracionárias. Segundo Roxo (1928 apud ROSA, 2013, p. 235) “fração é a medida de uma grandeza que contém uma ou mais das partes iguais em que se dividiu a unidade”.

Essa relação entre a História da Medida e o surgimento das frações apresenta-se como um dos elementos centrais para o ensino de fração - A síntese histórica do conceito (MOURA, 1996) - processo de ensino e de aprendizagem que evidencia quais os elementos essenciais do conceito que deve ser ensinado, um dos componentes estruturantes da proposta teórica-metodológica da Atividade Orientadora de Ensino, já abordada no capítulo 1.

### **2.3. As Frações nos Livros Didáticos**

Para o ensino do conceito de frações é necessário o desenvolvimento da contextualização na sua definição histórica, nas significações geométricas, na reta numérica e na relação entre as grandezas (ROSA, 2013).

Segundo Rosa et al. (2013), observamos que o desenvolvimento de números fracionários nos livros didáticos ou apostilas e a introdução deste conceito se dá de forma superficial, com exemplos de situações de contagem (quantificação discreta), se limitando a contextos do cotidiano, sem estabelecer sentido aos alunos, afastando-se da gênese do conceito de frações e das situações que permitam o desenvolvimento da quantificação contínua que é própria do conceito, a comparação de grandezas, sua representação geométrica de área e sua localização na reta numérica. Isso torna o ensino de frações um obstáculo para professores e alunos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental no Brasil.

No artigo de Rosa et al. (2013) intitulado: “Relações entre as proposições para o ensino do conceito de frações com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico-Cultural”, encontramos uma investigação teórica fundamentada nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, que analisa como o conceito de fração é apresentado nos livros didáticos. Esse processo de análise foi organizado atendendo a três categorias: 1) discreto e contínuo; 2) significações aritméticas, algébricas e geométricas; 3) conceito empírico e teórico. Algumas das questões que nortearam a investigação foram: Como o conteúdo está organizado? Qual o ponto de partida para introdução do Conceito de Fração? Quais as relações entre as preposições do livro didático com os tipos de pensamento: empírico e teórico?

As inquietações acima, tomando como referência Rosa et al, (2013), também estiveram presentes durante a realização da nossa pesquisa. Por esse motivo, nos movemos em direção a realizar um breve estudo comparativo com algumas obras aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático correspondente ao ano vigente da realização da presente pesquisa. Foi observada uma grande semelhança entre a introdução do conceito de fração dos livros de Matemática destinados ao 4º e 5º ano do ensino fundamental no contexto dessa pesquisa, com os livros analisados e apresentados no artigo de Rosa et al. (2013). Corroboramos com Rosa et al. (2013) ao afirmar que no desenvolvimento de números fracionários nos livros didáticos ou apostilas, observa-se que a introdução a este conceito se dá de forma superficial, com exemplos de situações de contagem (quantificação discreta), se limitando a contextos do cotidiano, sem significado real para o aluno, sem a produção histórica do próprio conceito de frações.

Com intuito de ilustrar as semelhanças encontradas durante a análise dos livros, apresentaremos algumas propostas presentes nos capítulos introdutórios do conceito de

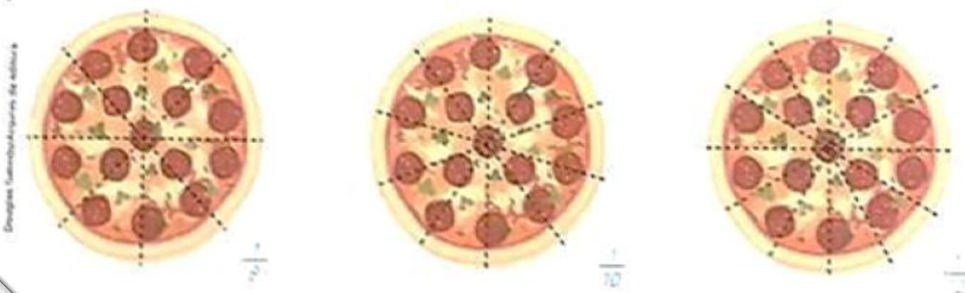
Fração. Para preservar a identidade dos autores das coleções expostos a seguir, denominaremos cada coleção com uma letra.

**Um pouco mais...**

Faça mais perguntas aos alunos:

- Qual das três pizzas tem o maior pedaço?
- Como se dá a fração correspondente a três pedaços de cada uma das pizzas?
- Que seu voto vale 10 de pizza?

**1** Como você viu nesta unidade, as frações são muito usadas no nosso dia a dia. Vamos retomar a abertura da unidade e realizar mais algumas atividades? As pizzas abaixo estão divididas em partes iguais. Observe os desenhos e escreva em seu caderno a fração correspondente a um pedaço de cada uma destas pizzas.



Desenho: Três pizzas divididas em partes iguais. A primeira pizza é dividida em 8 partes iguais, a segunda em 10 partes iguais, e a terceira em 12 partes iguais. Cada pizza tem uma fração escrita abaixo dela:  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{1}{12}$ .

Figura 4 - Proposta de exercício da Coleção A - do 4º ano. Capítulo sobre Fração.

Nessa primeira proposta, notamos que o intuito era apresentar o significado parte-todo da fração, no entanto quando expõe uma figura previamente dividida, o estudante só precisa contar para identificar o total de partes. Na realidade esta proposta está discretizando o contínuo, pois nesse caso a relação parte-todo é tratada apenas como número inteiro que representa quantidades que podem ser contadas. A mesma situação descrita sobre o livro didático, denominado aqui por coleção A, se repete em outros livros didáticos como podemos observar na próxima figura:



Sugestões de atividades enriquecedoras para esta Unidade você encontra nas Orientações para o professor. Superamos que paralelamente ao trabalho com as atividades, livro seja dada ao aluno a oportunidade de manusear instrun, de medição que contenham subdivisões, como, por exemplo: régua, trena, termômetro, balança etc.

## Fração de um todo

1. Beto comprou uma barra de chocolate. A barra veio dividida em 5 partes iguais. Explora-se aqui o número racional, representado na forma fracionária, em situações diversas, tendo implícita a relação parte-todo.

A fração  $\frac{5}{5}$  indica a barra de chocolate inteira.

Beto deu 1 das partes para Pedro e ainda ficou com 4 partes.

Beto deu a quinta parte ou  $\frac{1}{5}$  da barra para Pedro.

$\frac{4}{5}$  é a fração da barra de chocolate que ficou para Beto.

Na fração  $\frac{4}{5}$ , 4 é o numerador, e 5 é o denominador.

numerador → 4  
denominador → 5

número de partes da barra que ficou para Beto.  
número de partes iguais em que a barra veio dividida.

DEI UM QUINTO DO CHOCOLATE PARA PEDRO. SOBRARAM QUATRO QUINTOS PARA MIM.

Figura 5 - Coleção B - 5º ano. Primeira página do capítulo sobre Fração.

Observamos, mais uma vez, que na introdução do conceito de fração no ensino fundamental, são utilizadas situações envolvendo chocolate ou pizza, nas quais o estudante deve contar quantos pedaços tinha e quantos pedaços foram comidos, este exemplo é típico da quantificação discreta. Além de trabalhar apenas com frações menores que uma unidade, como podemos notar na proposta de exercício do próximo livro didático do 5º ano.

## Mais frações

1 Observe a figura e responda às questões.

UMA FIGURA

Pergunte aos alunos: "Que fração representa metade dessa figura?"  
Exemplo de resposta:  $\frac{5}{10}$

a) Que fração da figura foi pintada de amarelo?  $\frac{1}{10}$  da figura.

b) Que fração da figura foi pintada de azul?  $\frac{1}{10}$  da figura.

c) Com que cor foi pintada metade da figura? Vermelha.


d) Com que cor foi pintada  $\frac{3}{10}$  da figura? Verde.

Figura 6 - Proposta de exercício da Coleção C, livro destino ao 5º ano do Ensino Fundamental.

Neste tipo de situação, proposta no livro didático, limita o aprendizado do conceito apenas “nos limites do visual empírico” (ROSA et al., 2013, p. 235), além de trabalhar apenas com frações menores que uma unidade. Dessa forma, o aluno não compreende o lugar do número na reta numérica, geometricamente falando, tampouco a comparação entre as grandezas, considerada um dos princípios do conceito de medir.

Na próxima figura do livro didático da coleção D, verifica-se a que o significado parte-todo da fração é apresentado envolvendo duas situações: a quantificação contínua (desenhar a área da barra do chocolate) e a quantificação discreta (conjunto das balas), como observamos na descrição da proposta a seguir:

**Observe:** – Quantos alunos há em  $\frac{1}{3}$  de 12 alunos? E em  $\frac{2}{3}$ ? E em  $\frac{3}{3}$ ?  
Repita a atividade com a mesma quantidade – 12 alunos – mudando apenas a quantidade de grupos formados e a quantidade de alunos em cada um.



Você aceita trocar  $\frac{1}{3}$  dos meu chocolate por  $\frac{1}{3}$  das suas balas?

Aceito!

**Mostre o que você sabe**  
Registre no caderno.



- Desenhe uma barra de chocolate e pinte apenas  $\frac{1}{3}$  da barra. 
- Ao dar  $\frac{1}{3}$  da barra de chocolate para o colega, que fração corresponde à parte que sobra?
- Desenhe 6 balas e pinte somente  $\frac{1}{3}$  das 6 balas. 
- Quanto é  $\frac{1}{3}$  de 6 balas? 2 balas
- Que fração indicará a quantidade de balas restantes? E quantas balas restarão?  $\frac{2}{3}$  4 balas

Figura 7 - Coleção D - destinada para 5º ano. Primeira página do capítulo introdutório do Conceito de Fração.

Um ponto a ser discutido neste caso é o número que representa o total de balas que deve ser dividido em três partes iguais e depois uma dessas partes deve ser pintada. Para resolver essa situação o educando efetuará uma divisão do total de balas por 3 para perceber que cada parte tem 2 balas. No entanto, as situações que envolvem a significação da parte-todo utilizando a quantificação discreta nos remetem diretamente à divisão nos naturais, o que é inevitável, mas não revela o conceito.

Nas situações, descritas anteriormente, é notório o distanciamento do conceito de fração a sua origem histórica, a sua relação com a reta numérica e a comparação entre grandezas, princípio do conceito de medir. Dessa forma, a organização do ensino proposto nos livros didáticos analisados está ancorada apenas no desenvolvimento do pensamento empírico. Conforme Davidov (1988), o pensamento empírico está presente nas propostas de ensino em que:

Os processos de pensamento se limitam aqui: 1) à comparação dos dados sensoriais concretos com a finalidade de separar os traços formalmente gerais e realizar sua classificação; 2) à identificação dos objetos sensoriais concretos com a finalidade de sua inclusão em uma ou outra classe. (Davidov, 1988, p.108)

As limitações do pensamento empírico descritas por Davidov (1988) estiveram presentes nas situações de aprendizagem propostas nos livros didáticos. É com o intuito de transpor a limitação do pensamento empírico que, no capítulo 3, apresentaremos situações desencadeadoras de aprendizagem que objetivam o desenvolvimento do pensamento teórico. Tais situações tem como foco o ensino de frações, relacionando a quantificação contínua, estruturadas dentro da proposta teórico-metodológica - Atividade Orientadora de Ensino (AOE). Partindo dessa compreensão, utilizamos da retrospectiva histórica que muitos povos sentiram a necessidade de outros números que vão além dos números naturais, para poder representar resultados de mediação, o que levou à necessidade da representação fracionária. Utilizaremos como exemplo o texto trazido por Heródoto, que será descrito posteriormente.

## **2.4. Um olhar sobre os diferentes significados dos números racionais**

No decorrer do trabalho empírico dessa pesquisa, buscamos acompanhar com os professores compreenderam, se apropriaram e organizaram o ensino a partir dos sentidos que atribuíram ao conceito de fração. Restringimos nosso estudo ao significado Parte-Todo e sua natureza contínua, pois compreendemos ser ele o mais frequente no processo de introdução do conceito de fração para os alunos dos quartos e quintos anos do ensino fundamental. No entanto, fez-se necessário conhecer e compreender os diferentes significados dos números racionais uma vez que os outros significados poderiam ser mobilizados durante a resolução das Atividades Orientadoras de Ensino propostas aos professores investigados.

Nesse sentido, Anuchic e Aleevatto (2008) relatam a problemática em torno do ensino e a aprendizagem dos conceitos relacionados aos números racionais, derivando-se da

“consequência de um emaranhado de ideias, relacionadas e parcialmente sobrepostas, que circundam os números racionais.” (ANUCHIC e ALEEVATTO, 2008, p. 81). A origem dessas “diferentes ideias”, compreendidas como diferentes significados das frações, foi apresentada por Kieren (1976) que, a partir de seus estudos, introduziu a ideia de que os números racionais possuem várias concepções, entre elas o autor destaca sete interpretações para os números racionais:

1. Números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas etc;
2. Números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (via nosso sistema de numeração) dos números naturais;
3. Números racionais são classes de equivalência de frações. Assim  $\{1/2, 2/4, 3/6, \dots\}$  e  $\{2/3, 4/6, 6/9, \dots\}$  são números racionais;
4. Números racionais são números da forma  $p/q$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros e  $q \neq 0$ ;
5. Números racionais são operadores multiplicativos (por exemplo, “estreitadores”, “alargadores” etc.);
6. Números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito. Há números da forma  $x = p/q$ , onde  $x$  satisfaz a equação  $qx = p$ ;
7. Números racionais são medidas ou pontos sobre a reta numérica. (KIEREN<sup>7</sup>, 1976, apud TAVARES, 2012, p. 09)

Kieren (1976) sintetizou os números racionais por meio de cinco ideias consideradas básicas e essenciais: relação parte-todo; quociente; medida; razão; operador.

Podemos destacar algumas pesquisas que abordam o conceito de fração relacionado a um dos cinco significados dos números racionais apresentado por Kieren, como por exemplo, as seguintes pesquisas: Behr, Lesh e Silver, 1983; Romanatto, 1999; Catalini, 2002; Silva, 2005; Amorim, 2007; Demartini, 2009; Malasprina, 2007; Dias, 2007; Damico, 2007; Perlin, 2014. Dias (2011) apresenta a seguinte observação em relação às pesquisas:

Os principais estudos relacionam-se à formação do conceito, como a identificação de significações em determinados contextos como medida; quociente; razão; operador multiplicativo e probabilidade, e as operações com a representação fracionária. (DIAS, 2011, p. 02)

A compreensão dos números racionais e dos significados desse conceito favorece uma sólida base conceitual, na qual se estruturam os conhecimentos mais complexos, constituindo-se os elementos da estruturação do pensamento teórico sobre o conceito de fração. Desse modo, caminhar em direção ao objetivo central dessa pesquisa, que pretende compreender *Como a organização do ensino da matemática, mais especificamente no conceito de Fração,*

---

<sup>7</sup> KIEREN, T. (1976). **On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers**. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Paper from a Research workshop*, (pp.101–144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC

*a partir das contribuições da Teoria histórico-cultural e da Atividade Orientadora de Ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática, no quarto e quinto ano do ensino fundamental, passa pela necessidade do professor ter conhecimento dos elementos que envolvem o conceito de fração.*

Conhecer as concepções do número racional implica no processo de reflexão, domínio e integração dos seus diferentes significados; a realização de operações com desenvoltura e com compreensão do seu significado e não só como aplicação mecânica de algoritmos Damico (2007). Sendo dessa forma, somos capazes de construir e reinvestir conhecimentos de números racionais relacionando e integrando os seus diferentes significados na compreensão e resolução de situações que envolvam os números racionais na sua relação aritmética, geométrica e algébrica.

Mediante o exposto, apresentaremos uma pequena síntese das cinco concepções mais usuais no ensino do conceito de frações: **parte-todo, medida, quociente, razão e operador.**

### **Concepção da relação Parte-Todo**

Essa concepção evidencia parte de um inteiro sendo representado por  $\frac{a}{b}$ , sendo  $a$  chamado de **numerador**, indicando quantas partes foram tomadas/utilizadas; e  $b$  é o **denominador**, indicando em quantas partes o todo foi dividido.

Podendo ser representado por quantificações contínuas ou discretas:

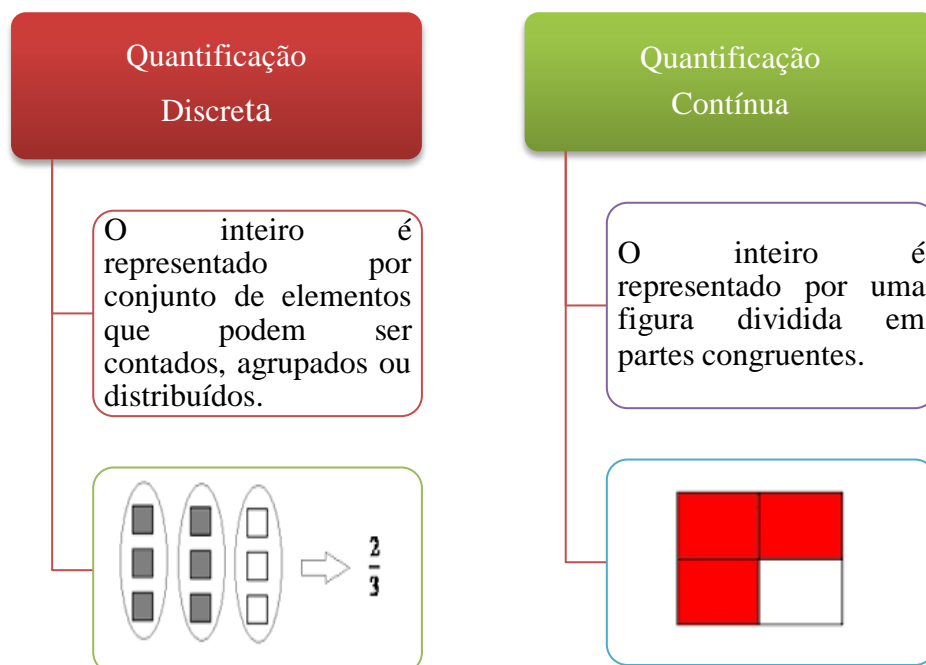


Figura 8 - Concepção parte-todo representação simbólica.

A quantificação discreta, exemplificada acima, remete diretamente à divisão dos números naturais e não requer nenhum conhecimento acerca do conceito de fração.

Na quantificação contínua, é necessária muita atenção, pois, se apresentarmos uma figura totalmente dividida em partes congruentes, possibilitamos apenas a contagem dos números que deverão ser considerados na figura e, dessa forma, estamos discretizando o contínuo. Por isso, na concepção parte-todo no contínuo é preciso apresentar figuras que possibilitem a discussão a respeito de área e forma.

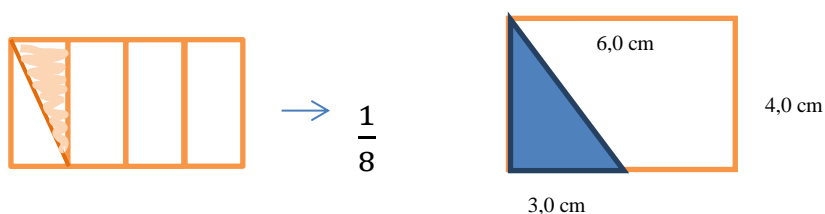


Figura 9 – Figuras que mobilizam o trabalho com a área.

Outras situações desencadeadoras de aprendizagem que evidenciam o conceito de fração e a relação com a quantificação contínua serão expostas no capítulo 4, quando serão apresentadas as seguintes AOE: “No Egito antigo...” e “As famílias egípcias e o pagamento de impostos”.

### **Concepção de Medida**

Nessa concepção a fração  $\frac{a}{b}$  está relacionada a uma unidade de medida que foi dividida em  $b$  partes das quais serão consideradas  $a$  partes. Evidencia, também, que o conjunto dos números racionais é uma extensão dos números naturais, que  $\frac{a}{b}$  ocupa um ponto bem definido na reta numérica. Segundo Silva (2004):

Um outro ponto importante nesta concepção, que não acontece na concepção anterior [parte/todo] , é a ocorrência das frações maiores que a unidade, da notação dos números mistos e da soma de duas medidas de forma natural, o que favorece a percepção da equivalência no reconhecimento de que a mesma medida recebe nomes diferentes em função de novas divisões da unidade. (SILVA, 2004, p. 6)

### **Concepção de Quociente**

A concepção de quociente estabelece uma relação diferente da fração  $\frac{a}{b}$ , nesse caso,  $a$  não representa partes do inteiro ou da unidade, mas algo que será dividido em um número  $b$  de partes. Sendo assim,  $a$  representa a quantidade que foi dividida ou distribuída em  $b$  partes.

Essa concepção está associada à ação de distribuição ou de divisão. Onuchic e Allevato (2008, p. 88) definem que “seu significado é percebido quando um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos”.

### **Concepção de Razão**

A razão é usada como um padrão comparativo entre duas grandezas, em que  $a$  está para  $b$ . Pode ser vista como uma constante que se fundamenta no conceito de proporcionalidade. Silva (2004, p. 10) destaca que “o trabalho com razões encaminha os alunos à equivalência de números fracionários e para o pensamento proporcional, excelente ferramenta para a resolução de problemas”.

### **Concepção de Operador**

A concepção de operador está ancorada na ideia de “esticar”, ou “encolher”, de “ampliar” ou “reduzir”. A fração admite uma função de transformar uma situação inicial para produzir uma situação final assumindo um caráter funcional de transformação.

Nossa intenção, com essa breve exposição das concepções de frações, é apontar a necessidade do professor que ensina matemática ter o conhecimento mais amplo do conceito de fração, como alerta Onuchic e Allevato (2008),

[...] muitas vezes são desconhecidas, ou mal compreendidas, ou ignoradas ou trabalhadas apenas superficialmente, em sala de aula. Não raro, razões são consideradas como frações, uma vez que, a partir de seu símbolo, a notação barra fracionária, induzem a um tratamento semelhante. É necessário que se tenha um real conhecimento e que se reflita cuidadosamente sobre suas diferenças. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2008, p. 99)

Desse modo, apropriar-se dos diferentes significados das frações possibilita ao professor aumentar o seu conhecimento acerca dos elementos teóricos que constituem os números racionais, ação que o ajudará durante a organização dos saberes que estruturam o conceito estudado. Acreditamos que, ao promover o acesso aos conhecimentos científicos acerca do conceito de fração, nos afastamos do pensamento empírico e caminhamos em direção a uma aprendizagem investigativa que poderá influenciar o desenvolvimento do pensamento teórico sobre o conceito.



### 3. O PERCURSO METODOLÓGICO

#### 3.1. A Pesquisa em Movimento

A pesquisa educacional envolve a relação com inúmeras questões implicadas na existência humana, “desde o nosso corpo até as nossas ideologias, num conjunto único, porém, de constante processo simultâneo de consolidação, contradição e mudança.” (GATTI, 2002, p. 13). São comuns termos que lidar com o próprio processo de vida dos participantes durante a pesquisa, diferentemente de estudos em áreas como a Biologia, a Química ou a Física, nas quais é possível obter respostas de forma estritamente experimental, onde o microscópio e tubos de ensaios são os instrumentos base na tentativa de manipular e controlar os fatores da situação. Tais procedimentos, evidentemente, se tornam impraticáveis nas questões ligadas à educação humana, porque certos controles não podem ser aplicados aos seres humanos vivos e nem a circunstâncias sociais nas quais essa educação acontece (GATTI, 2002),

A característica da pesquisa educacional – de ser algo vivo e com elementos próprios do processo de vida dos participantes – evidenciou-se já no primeiro encontro da nossa investigação quando, diante da necessidade de estudarmos um conceito da matemática que fosse considerado importante para ser trabalhado com os educandos dos quartos e quintos anos, o grupo decidiu de forma coletiva pelo conceito de fração que, desta forma, passou a compor o nosso objeto de estudo.

Vale destacar, que a nossa pesquisa está ancorada no materialismo histórico dialético e essa abordagem, segundo Fiorentini (1989) vê a ciência como uma categoria histórica, um fenômeno em contínuo devir inserido no movimento das transformações sociais.

Metodologicamente, o processo de investigação é visto como um procedimento que vai do *empírico real* (que apresenta uma visão caótica e sincrética) ao *concreto* – síntese de múltiplas relações e determinações (Apresentando uma visão crítica e orgânica) – por meio da participação do todo, de categorias e abstrações (KOSIK, 1976). Por isso, essa abordagem explora com frequência categorias analíticas bipolares, as quais preservam uma tensão dialética, como teoria/prática, concreto/abstrato, tese/antítese, etc. (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, P. 67).

Em conformidade com o materialista histórico dialético, tendo Marx como precursor desse método, Frigotto (1987) em seu texto *O enfoque da dialética materialista histórica na pesquisa educacional*, comenta uma das raras passagens em que Marx fala do seu método, e

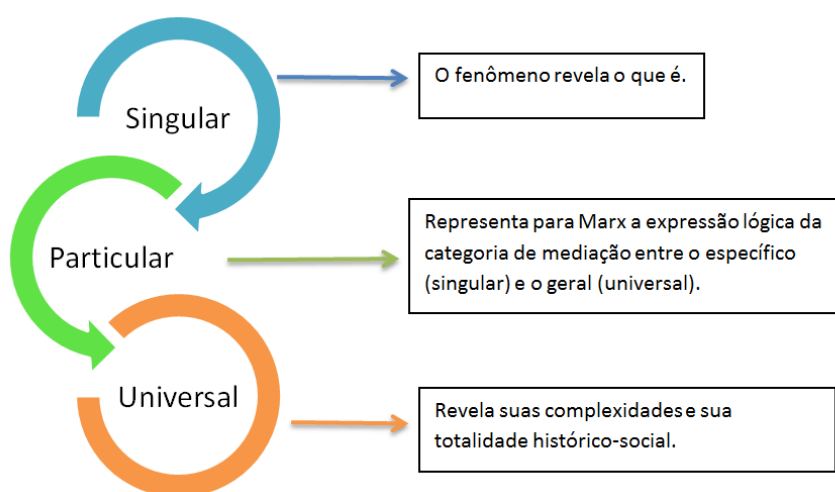
apresenta um desses momentos ao citar o posfácio à 2ª edição de *O Capital*, em que Marx através de um dos seus críticos fala de seu método de forma sucinta:

Para Marx só importa uma coisa: descobrir a lei do fenômeno de cuja investigação ele ocupa. (...). Para ele o mais importante é a lei de sua modificação, de seu desenvolvimento, isto é, transição de uma forma para outra, de uma ordem de relações para outra (...). Por isso Marx só se preocupa com uma coisa: provar mediante escrupulosa pesquisa científica a necessidade de determinados ordenamentos de relações sociais e, tanto quanto possível, constatar de modo irrepreensível os fatos que lhe servem de ponto de partida e de apoio. (MARX, 1983 apud Frigotto, 1987, p. 79)

Corroboramos com Frigotto (1987) ao indicar a necessidade de demarcar o que compreendemos sobre o método descrito por Marx (1983):

[...] demarcar primeiramente a dialética materialista histórica enquanto uma postura, ou concepção de mundo; enquanto um método que permite uma apreensão radical (que vai à raiz) da realidade e, enquanto práxis, isto é, unidade de teoria e prática na busca da transformação e de novas sínteses no plano do conhecimento e no plano da realidade histórica. (Apud FRIGOTTO, 1987, p. 73)

Martins (2011), também em seu texto *As aparências enganam: divergências entre o materialismo histórico dialético e as abordagens qualitativas de pesquisa*, demonstra a importância de o pesquisador se posicionar diante de sua escolha metodológica a partir da compreensão do método em sua essência. Destaca que para o materialismo histórico dialético a compreensão do fenômeno se dá de forma processual dentro da sua totalidade, corroborando com Oliveira (2005) afirmar que esse movimento ocorre de forma dialética entre o singular, particular e universal.



**Figura 10- Movimento dialético: singular-particular-universal, a partir de Oliveira (2005).**

A definição desse movimento dialético do singular-particular-universal é explicado por Oliveira (2005), como sendo:

[...] objetivações que precisam ser apropriadas, pelo indivíduo, para que possa dominar o sistema de referências do contexto em que vive e, assim, objetivar-se como sujeito ativo e participante das transformações desse contexto. Mas para que isso possa ser compreendido nas suas múltiplas relações, é preciso considerar que todo esse processo entre o indivíduo (o singular) e o gênero humano (o universal) se concretiza na relação que o indivíduo tem com a sociedade (o particular). (OLIVEIRA, 2005, p.03)

Indo ao encontro do processo dialético, exposto por Oliveira, Bernardes (2006) evidencia em sua pesquisa que o movimento de conscientização dos sujeitos acontece de forma dialética, sendo possível observar que é no movimento de conscientização, tanto do docente quanto do estudante ao ser integrado na atividade pedagógica, que são criadas as condições e circunstâncias que possibilitam o desenvolvimento.

Como afirma Vigotski (2002, p.86) “é somente em movimento que um corpo mostra o que é.” Como procedimento metodológico, isso implica criar condições que permitam ao pesquisador analisar o processo de desenvolvimento do seu objeto de estudo. Com esse objetivo, a investigação ocorreu na forma de um curso de extensão voltado à formação continuada de professores dos anos iniciais da educação básica, mas especificamente dos quarto e quinto anos do Ensino Fundamental. Tal curso denominado “O conceito de Fração e a organização do ensino a partir de Atividades Orientadoras de Ensino” foi desenvolvido em escola da rede municipal de Guarulhos, composto por quinze encontros semanais durante o segundo semestre de 2015.

Os quinze encontros do curso ocorreram durante o horário de trabalho dos professores, no espaço denominado hora-atividade que é destinado a momentos de planejamento e estudo. As discussões que se deram durante esse processo entre os professores e entre professores e pesquisadora, foram gravadas em áudio e vídeo. Tais gravações foram transcritas e juntamente com as notas do diário de campo da pesquisadora e os registros escritos pelos participantes, constituíram-se dados para a análise.

O grupo foi constituído por vinte professores do Ensino Fundamental com atuação polivalente, com licenciatura em Pedagogia, sendo cinco professores que lecionavam nos 1º anos, dois professores nos 2º anos, quatro professores nos 4º anos, cinco professores nos 5º anos, três professores que atuavam na educação infantil e a professora coordenadora da unidade escolar. A participação dos professores que lecionavam em anos diferentes do foco dessa pesquisa – professores dos 4º e 5º anos – é justificada pelo fato do grupo escola ser formado por professores polivalentes, que podem atuar na Educação Infantil e no Ensino Fundamental do 1º ao 5º ano, escolha que ocorre no final de cada ano letivo. No entanto, na

análise dos dados, focamos os professores que durante a realização dessa pesquisa lecionava no 4º ou 5º anos do Ensino Fundamental.

A organização do Curso apoiou-se nos pressupostos teóricos do conceito de Atividade (LEONTIEV, 1983) e de Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 1996), proporcionando condições para que os docentes trabalhassem coletivamente na produção de propostas de ensino que objetivassem as suas necessidades efetivas de ensino (MORETTI, 2007).

Durante o curso, buscamos propor aos professores situações-problema que entendemos como desencadeadoras da aprendizagem docente, tendo como referência metodológica o experimento didático, que tem como base teórica os estudos de Vigotski e Davidov, apresentado por Moura e Cedro (2012) como um método de investigação que possibilita estudar a natureza do desenvolvimento psíquico dos sujeitos, o ensino e sua educação. Segundo esses autores, o experimento didático pode ser definido como:

[...] um método de investigação psicológica que permite estudar a essência das relações internas entre os diferentes procedimentos da educação e do ensino e o correspondente caráter de desenvolvimento psíquico do sujeito. Um dos pontos essenciais dessa perspectiva é que ela pressupõe a intervenção ativa do pesquisador nos processos psíquicos que ele estuda (DAVYDOV<sup>8</sup>, 1988 apud MOURA e CEDRO, 2012, p.31).

O experimento didático foi tomado como nossa base investigativa e apresentamos na proposta de coleta de dados uma organização que se aproxima das características gerais do experimento didático descrito por Thompson:

- Orientação para os processos descobertos pelos alunos aprenderem certos conceitos escolares;
- Natureza longitudinal da pesquisa;
- Intervenção do pesquisador na aprendizagem dos estudantes;
- Constante interação entre as observações coletadas e o planejamento futuro das ações;
- Os dados são mais qualitativos do que quantitativos. (THOMPSON<sup>9</sup>, 1979 apud MOURA e CEDRO, 2012, p.32).

A descrição do experimento didático será exposta no item seguinte.

No decorrer do experimento buscou-se acompanhar o movimento de transformação do pensamento empírico dos professores, o qual se apoia em caráter externo, imediato e suas

---

<sup>8</sup> DAVIDOV, V.V. **La enseñanza escolar el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental**. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

<sup>9</sup> THOMPSON, P. **The constructivist teaching experiment in mathematics education research**. Paper presented at the research reporting session, annual meeting of NCTM, Boston, March, 1979.

representações são resultados da experiência sensorial (DAVIDOV, 1988), para o pensamento teórico que objetiva “em revelar a essência dos objetos, as leis internas de seu desenvolvimento” (DAVIDOV, 1988, p.106). Compreendendo esse como um processo de superação, no qual o pensamento empírico não deixa de existir, necessariamente. As ações da pesquisadora no decorrer do experimento didático buscaram criar condições para o desenvolvimento das características do pensamento teórico o qual, como afirma Davidov (1988),

[...] se esforça para passar da descrição dos fenômenos ao descobrimento da essência, da conexão interna dos mesmos. Sabe-se que a essência tem um conteúdo diferente dos fenômenos e das propriedades dos objetos diretamente dados. (DAVIDOV, 1988, p. 104)

Consideramos que o movimento de desenvolvimento do pensamento teórico, compõe um elemento central a ser investigado no processo de aprendizagem de todos os atores envolvidos nessa pesquisa: pesquisadora e professores que ensinam matemática no quarto e quinto anos do ensino fundamental.

### **3.2. Os participantes**

Com intuito de preservar a identidade dos participantes dessa pesquisa, utilizamos nomes fictícios e apresentaremos alguns aspectos referentes à formação dos professores e suas lembranças e sentimentos em relação ao ensino da matemática.

A relação do grupo com ensino da matemática foi projetada a partir de lembranças das experiências marcantes, positivas ou negativas, em relação a sua história com o ensino da matemática. A intenção de realizarmos uma breve retrospectiva dos professores em relação ao ensino da matemática, no período escolar, está ancorada na pesquisa de Nacarato, Mengali e Passos (2009) que evidenciam o quanto é importante conhecer as experiências dos docentes com a matemática durante a sua escolarização. Segundo Nacarato, Mengali e Passos (2009)

As professoras trazem crenças arraigadas sobre o que seja matemática. Tais crenças, na maioria das vezes, acabam por contribuir para a constituição da prática profissional. [...] daí a importância de analisar, em cursos de formação, a trajetória profissional das professoras para identificar quais são essas crenças e como elas podem ser trabalhadas para ser rompidas e / ou transformadas. (NACARATO; MENGALI e PASSOS, 2009, p. 24)

As informações acerca das recordações do ensino da matemática foram adquiridas durante o primeiro encontro da investigação, onde foi sugerida aos professores a escolha de uma palavra para representar suas lembranças.

A seguir, descreveremos brevemente os participantes e apresentaremos a palavra escolhida por eles para representar a sua relação com o ensino da matemática durante o seu processo de escolarização.

Professora Ana na época do curso estava com 33 anos, formada em Letras e Pedagogia. Naquele ano lecionava para uma turma do quinto do ensino fundamental. A palavra escolhida por ela, para representar a suas lembranças em relação ao ensino da matemática, foram “Insistência e terror”. Segundo o relato da professora Ana, a escolha dessas duas palavras representam dois momentos, o primeiro durante o ensino fundamental em que era preciso ser insistente para apreender “eu me lembro de não entender as figuras geométricas, e quando perguntava para a professora, a resposta era sempre a mesma "procura, procura". Mas, ela não falava aonde tinha que procurar”. A segunda palavra escolhida pela professora remete a seu tempo de formação no magistério, conforme o seu depoimento: “foi um terror a professora era muito chata, entrava na sala e todo mundo tremia. Ela tentava explicar as benditas “f de x” e eu não entendia... Eu fiquei traumatizada com “f de x”(…). Uma vez, durante uma atividade, eu não tinha percebido que ela estava na sala e como não sabia como resolver a questão fui perguntar para uma colega. Mas, a professora não gostou e até me empurrou (...)”.No entanto, apesar das lembranças não demonstrarem aspectos positivos em relação ao ensino da matemática, a professora Ana completa a sua fala dizendo: “Mas, independente de ter acontecido tudo isso, sempre gostei da matemática e até que conseguia me virar sozinha.”

A professora Cida, 25 anos, formada em Pedagogia. Estava lecionando para turma do quinto ano. A palavra escolhida foi “Dificuldade”. Conforme o seu depoimento, ela tem poucas recordações da matemática nos anos iniciais, mas o que ficou em suas lembranças, para ela justifica a escolha da palavra – dificuldade. “A minha palavra é: "dificuldade", eu não me lembro muito também da matemática dos anos iniciais. Mas, eu me lembro das tabuadas, das continhas de vezes e divisão, que era uma época de muito sofrimento principalmente porque eu não sabia a divisão. E fui carregando essa dificuldade a vida a fora”.

A professora Cida, relata que conseguiu diminuir a sua aversão à matemática quando no ensino médio se deparou com um excelente professor de matemática “Foi um ano que eu

gostei bastante da matemática, porque eu consegui entender aqueles números todos pra mim fazia um sentido, tinha um significado. Naquele ano eu consegui entender. Mas isso também já foi no segundo colegial”. Essa experiência positiva a qual passou durante o ensino médio fez com que escolhesse cursar o técnico em contabilidade “no colegial normal eu passei para contabilidade, tinha matemática financeira, que é uma matemática maravilhosa. Gostava bastante e não tinha mais dificuldade”.

A professora Cleo, 47 anos, Pedagoga. Trabalhava com a turma do quarto ano. A sua palavra também foi “Dificuldade”, o seu relato apresentam lembranças negativas em relação ao ensino da matemática, e diz que até hoje não gosta da matemática. Conforme o seu depoimento: “Não gosto de matemática, desde a época de escola. Tive um professor militar. chegava e explicava uma vez e acabou. Eu nunca entendia na primeira vez e não tinha mais nem esperança de aprender. Até hoje sinto essa dificuldade em entender a matemática”.

Professora Fátima, 38 anos, formada em Pedagogia. “Muitas operações” foi a expressão escolhida para representar a suas lembranças do ensino da matemática. Seu o relato traz que o ensino da matemática era estruturado a partir da aplicação de exercícios, que os estudantes tinham que fazer até decorá-los “meus professores passavam muitos exercícios, muitas operações. Era só decorar e responder nunca tive dificuldade com matemática”.

A professora Márcia, 44 anos, Pedagoga e pós-graduada na área educacional. Durante a realização do curso estava como docente de uma turma do quinto ano. A palavra escolhida foi “Cobrança”, também no seu relato aparece o ensino da matemática ancorado na repetição e decoração de exercícios. Conforme a professora Márcia “[...] lembro-me da cobrança da matemática, você tinha que decorar! Estudei em escola de freira, era uma tristeza, tinha a chamada oral e era praticamente todo dia e se errasse a resposta levava bilhete para casa, por isso, em casa decorava todas as lições minha mãe me fazia repetir de trás pra frente e de frente pra trás”.

Professora Nina, 34 anos, formada em Pedagogia. Durante o desenvolvimento do curso estava lecionando para uma turma de quinto anos. A palavra indicada por essa professora, também foi “Dificuldade”, assim como as demais professoras que relacionaram essa palavra as suas recordações do ensino de matemática, a professora Nina traz no seu relato a existência de uma matemática baseada na decoração de conceitos, “só lembro na aula de matemática fazíamos o cabeçalho e depois tabuada, e uma vez por semana a professora fazia chamada oral e dava bolinha de gude pra quem acertasse”.

A professora Rita, 30 anos, possui formação em Pedagogia. Lecionava para turma do quinto ano. As palavras que se relacionam com suas lembranças do ensino da matemática foi “Matemática só escolar”, no seu relato apresenta uma crítica ao modo como era organizado o ensino, “Eu lembro tudo ser extremamente mecanizado. Não me lembro de nada que tivesse relação com a matemática fora da escola, a matemática era escolar. Eu não tinha dificuldade, era mecânico você tinha que responder, respondia e pronto”.

Professora Rute, 37 anos, formada em Pedagogia e com pós-graduação em Alfabetização e Letramento, Gestão escolar e Educação especial. Durante a sua participação no curso estava lecionando para a turma do quarto ano. A suas recordações do ensino da matemática estava relacionada à seguinte frase “Reforço com a turma na minha casa”, que remete a dificuldades que tinha durante as aulas de matemática e precisava da constante ajuda da sua mãe, que fazia o papel de explicar os conceitos matemáticos cobrados pela escola. De acordo com seu relato “Eu lembro que eu tinha uma dificuldade imensa, na escola, para entender  $3 \times 3$ . Quando chegava em casa minha mãe reunia os meus amigos para ensinar. Recebia diversas broncas da minha mãe, porque ela até desenhava e eu não conseguia entender”.

Os depoimentos apresentados, pelos professores participantes da pesquisa, evidenciam que organização do ensino da matemática estava pautada numa rotina de exercícios mecanizados e na memorização de conceitos matemáticos. Demonstrando que ensino de matemática estava ancorado nas características do desenvolvimento do pensamento empírico.

### **3.3. Experimento Didático: O conceito de Fração e a organização do ensino a partir de Atividades Orientadoras de Ensino**

O experimento didático teve como objetivo específico observar os movimentos das ações dos professores e os indícios de mudanças no tipo de pensamento – pensamento empírico para o pensamento teórico. Processo que foi fundamental para responder a questão que move a nossa pesquisa: *como a organização do ensino do conceito de Fração, a partir das contribuições da Teoria Histórico-Cultural e da Atividade Orientadora de Ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática no quarto e quinto ano do ensino fundamental?* O conceito de Atividade Orientadora de Ensino (AOE) foi tomado como uma proposta de organização da atividade de



ensino e de aprendizagem que, alimentada pelos pressupostos da teoria histórico-cultural, se apresentou como desencadeador da mudança de prática, da apropriação de conceitos e o desenvolvimento do pensamento teórico no conceito da Fração.

Durante a abordagem do conceito da Fração, foi desenvolvido um estudo sobre seus aspectos históricos e conceituais, apresentando exemplos de AOE e os professores foram convidados a produzirem propostas de ensino voltadas para seus educandos, em coerência com a realidade na qual estavam inseridos e os conceitos abordados, que configuraram na seguinte forma:

- Apresentar aos professores o Conceito de Atividade Orientadora de Ensino;
- Aprofundar o estudo sobre os aspectos histórico e conceitual da fração;
- Propiciar as condições necessárias para a realização do trabalho coletivo, para que as apresentações e as discussões provenientes das atividades desenvolvidas se efetivassem.

Compreendemos o trabalho coletivo, como aquele que abrange os elementos apontados por Rubtsov:

- Repartição das ações e das operações iniciais, segundo as condições da transformação comum do modelo construído no momento da atividade;
- Troca de modos de ação, determinada pela necessidade de introduzir diferentes modelos de ação, como meio de transformação comum do modelo;
- Compreensão mútua, permitindo obter uma relação entre, de um lado, a própria ação e seu resultado e, de outro, as ações dos parceiros com vistas a obter um resultado comum;
- Comunicação, assegurando a repartição, a troca e a compreensão mútua;
- Planejamento das ações individuais, levando em conta as ações dos parceiros com vistas a obter um resultado comum;
- Reflexão, permitindo ultrapassar os limites das ações individuais em relação ao esquema geral da atividade (assim, é graça à reflexão que se estabelece uma atitude crítica dos participantes com relação às suas ações, a fim de conseguir transformá-las, em função de seu conteúdo e da forma do trabalho em comum). (RUBTSOV, 1996, p. 136)

Esses princípios, acerca da organização do trabalho coletivo, foram priorizados durante os encontros. Mas, também, tínhamos a preocupação quanto à organização do espaço físico; desse modo, a sala onde aconteciam os encontros era arrumada em círculo ou as cadeiras eram dispostas formando grupos menores, dependendo da situação desencadeadora

que era planejada para o encontro. Essa precaução quanto à organização do espaço físico, estava vinculada com a intenção de proporcionar um ambiente mais acolhedor e favorável ao diálogo.

O experimento didático foi norteado pelos seguintes temas: Construção Histórica dos Números Racionais; Fração; Os números racionais e a medição; Insuficiência dos números naturais; Reconhecer a equivalência entre escritas fracionárias; O conceito de Atividade Orientadora de Ensino.

No primeiro encontro, apresentamos a proposta da pesquisa e foi estabelecido com o grupo o conceito da matemática que teríamos como foco de estudo, procedimento já descrito nesse capítulo. Nesse encontro, também conversamos sobre o percurso profissional e a relação com o ensino da matemática de cada participante. Os instrumentos da coleta de dados, utilizadas durante os quinze encontros foram: Gravação audiovisual, registros escritos pelos grupos e diário de campo.

No segundo encontro, mantivemos o objetivo de conhecer o perfil do grupo, em relação ao ensino da matemática e atuação do professor polivalente. Com essa intenção, o encontro foi norteado pelo seguinte questionamento: Lembrar-se de experiências marcantes, positivas ou negativas, em relação a sua história com o ensino e a aprendizagem da matemática – Primeiro suas lembranças como aluno e depois em sua relação como docente. Para socializar essas lembranças, cada participante escolheu uma palavra, para representar a recordação desse momento, no decorrer do encontro falaram sobre a escolha da palavra e a relação estabelecida com a aprendizagem e o ensino da matemática.

Terceiro encontro, realizamos coletivamente uma linha do tempo contendo marcos histórico do ensino da matemática nas últimas décadas, a partir das lembranças manifestadas no encontro anterior. E conversamos sobre as seguintes questões relacionadas à organização do ensino da matemática:

- Qual é o tempo destinado o ao ensino Matemática?
- Porque as crianças devem aprender matemática?
- Você considera que as crianças gostam de matemática? O que mais gostam de fazer?
- Quais as principais dificuldades que identificam no ensino da Matemática?

No quarto e quinto encontro, realizamos a AOE – Carta Caitité (Anexo 1) – com o objetivo de compreender os elementos que constituem essa proposta de organização do

ensino. Usamos como referência para o nosso estudo o texto “Controle da variação de quantidades”, (MOURA, 1996).

No sexto encontro, o nosso objetivo era conhecer um pouco mais, sobre o que os professores consideravam uma boa prática para iniciar o estudo do conceito da fração, para os educandos do 4º e 5º ano do ensino fundamental. Nesse encontro, tivemos dois momentos: no primeiro os professores formaram grupos, com aproximadamente quatro participantes, conversaram e registraram uma prática que consideravam mais adequadas para iniciar o estudo sobre fração. No segundo momento, ocorreu a socialização das propostas elaboradas pelos grupos.

Para o sétimo encontro, retomamos a discussão iniciada no encontro anterior, apresentando as ideias principais presentes durante a socialização. Depois, desenvolvemos a AOE que denominamos “No Egito antigo...”, proposta inspirada nas pesquisas de Catalani (2002) e Perlin (2014), a qual apresenta a relação entre medir aspectos contínuos e o conceito de fração. Como descreve Catalani (2002, p. 94) “a situação problema permite que [os sujeitos] elaborem o conceito, participando do processo de seu desenvolvimento – pensar conceitual, no movimento de criação do conceito de fração.”.

Esse encontro foi organizado de modo a apresentar a atividade orientadora de ensino partindo de uma situação que produz um problema histórico situado. E foi disponibilizado o texto abaixo:

#### História virtual: *No Egito antigo...*

*O rei Sesóstris repartiu todo o Egito entre os egípcios, e deu uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Sendo ele um faraó justo, comunicou aos súditos que se a porção de terra fosse diminuída pelo rio Nilo, era necessário procurar o faraó e lhe expor o que tinha acontecido à sua terra. Que seria enviado medidores ao local e para medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra.*

Como realizar a distribuição da terra entre as famílias numa época em que não se conhecia os instrumentos de medidas que temos hoje?

O problema não termina aí...

*No ano de 1852 a.C algumas famílias egípcias tiveram sua porção terra reduzidas devido à cheia do rio Nilo. Assim, solicitaram ao faraó Sesóstris que enviasse medidores ao local para que pudessem fazer o pagamento dos tributos de forma justa, conforme o que tivesse ficado de terra.*

Com o instrumento de medida, utilizando pelo seu grupo, como representar a terra que ficou após a cheia do rio Nilo?

---

Para realização dessa situação desencadeadora de aprendizagem disponibilizamos materiais diversos como: rolo de barbante, fita decorativa, papel pardo, cartolinas. Para que cada grupo pudesse representar a divisão da terra. Durante o processo de divisão da terra foi problematizado a seguinte questão: *Como fazer para distribuir a cada um uma porção igual?*

O oitavo e o nono encontro, foram destinados para a resolução, debate e elaboração coletiva da síntese sobre os elementos presentes na AOE – “No Egito antigo...”.

A segunda situação desencadeadora de aprendizagem que denominamos de “As famílias egípcias e o pagamento de impostos”, aconteceu no décimo encontro do experimento didático. Teve como objetivo dar continuidade ao estudo do conceito de fração relacionado à grandeza contínua e comparação de frações (frações equivalentes). Como afirma Rosa et al.(2013), se atingem as “abstrações científicas próprias do conceito de fração, como um número racional, a partir do estudo das grandezas, não só discretas, mas também contínuas, na inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas.”. (ROSA et al., 2013, p. 235). Com intuito de abordar e discutir os princípios do conceito de fração, pontuados por Rosa et al. (2013), elaboramos essa AOE.

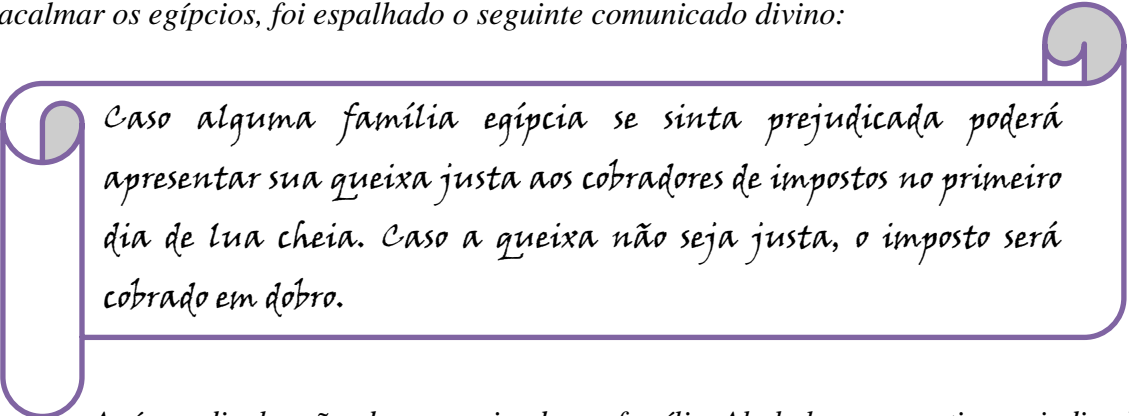
Os professores receberam a história virtual e em duplas buscaram a resolução da questão presente na AOE e depois socializaram a forma como chegaram à sua resolução. Para ilustrar esse momento, apresentaremos a história virtual que compôs a AOE - As famílias egípcias e o pagamento de impostos:

### **AS FAMÍLIAS EGÍPCIAS E O PAGAMENTO DE IMPOSTOS**

*No antigo Egito, os faraós eram considerados representantes divinos e eram os administradores máximos do Egito.*

*No governo do faraó Sesóstris, houve a divisão de terra entre todos os egípcios de modo que cada família recebia uma porção retangular igual de terra às margens do Rio Nilo. Para essa divisão, a unidade de medida padrão utilizada pelos agrimensores era o cúbito, que era o comprimento equivalente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó, depois era transferidos para uma corda vários cúbitos, separados por nós. Após a cheia do Nilo as terras eram medidas novamente e eram cobrados impostos proporcionais à terra restante para cada família.*

*Durante a troca de reinado do faraó Sesóstris para o seu sucessor Amenemés houve muitas reclamações sobre o pagamento dos impostos. Como Amenemés era um soberano muito justo, decidiu que a partir do ano seguinte todas as medições de terrenos seriam refeitas com novas medidas, mas em compensação o imposto desse ano seguiria as medições já feitas no reinado de Sesóstris. Então ordenou que todas as cordas com o cúbito do antigo faraó fossem queimadas e providenciadas novas cordas utilizando o seu cúbito. Para acalmar os egípcios, foi espalhado o seguinte comunicado divino:*



*Caso alguma família egípcia se sinta prejudicada poderá apresentar sua queixa justa aos cobradores de impostos no primeiro dia de lua cheia. Caso a queixa não seja justa, o imposto será cobrado em dobro.*

*Após a divulgação do comunicado, a família Abubakar se sentiu prejudicada. Os membros dessa família não acharam justo pagarem mais impostos do que os vizinhos Fenuku. Decidiram então que fariam uma queixa. Mas para não correrem o risco de pagarem o imposto em dobro, fizeram cuidadosamente as medições do comprimento do seu terreno usando uma antiga unidade familiar: a khamisa. Sabiam que antes da cheia, o comprimento do terreno tinha 5 khamisa e após a cheia do rio Nilo, que foi muito rigoroso, o comprimento do seu terreno era de 3 khamisa.*

*Procuraram os vizinhos Fenuku e apresentaram o problema. Os Fenuku ouviram a queixa e também realizaram suas medições com a sua unidade familiar: a sabaa. O terreno dos Fenuku tinha o comprimento de 7 sabaa antes da cheia e após a cheia do rio Nilo, o comprimento do seu terreno foi de 4 sabaa.*

*Com essas informações os Abubakar tiveram a certeza de que estavam certos em realizar a queixa. Porém, os Fenuku não concordaram e achavam que tinham sido mais prejudicados pela cheia do Nilo!!!*

*Os Abubakar tinham razão? Eles devem fazer a queixa aos cobradores de impostos?*

*Vamos ajudá-los a resolver essa dúvida utilizando os conhecimentos matemáticos da época.*

Durante o décimo primeiro encontro, socializamos a resolução da situação desencadeadora de aprendizagem: “As famílias e o pagamento de impostos”. Também nesse encontro, disponibilizamos para o grupo, o artigo de Rosa et al. (2013) intitulado “Relações entre as proposições para o ensino do conceito de frações com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico-Cultural”. E após uma conversa sobre esse artigo, realizamos um breve estudo comparativo com algumas obras aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2016, e a introdução do conceito de fração que compõe o livro analisado por Rosa et al. (2013) em seu artigo. Utilizamos para esse estudo quatro coleções de Matemática destinadas aos quartos e quintos anos do ensino fundamental, tendo como foco central: a quantificação discreta e quantificação contínua das frações.

No décimo segundo encontro, foi destinado à elaboração de uma proposta de ensino do conceito de fração para os quartos e quintos anos do ensino fundamental, movimento que a princípio aconteceu nos pequenos grupos.

Nos encontros seguintes, décimo terceiro e décimo quarto, os professores reelaboraram coletivamente a proposta que consideraram mais adequadas dentro do pressuposto teórico-metodológico que discutimos nos encontros anteriores.

Décimo quinto encontro, ocorreu à avaliação final do trabalho desenvolvido sobre a organização do ensino de Fração, através de uma roda de conversa com os professores, sobre os elementos que constituíram a nossa proposta de experimento didático.

Apresentaremos, no quadro a seguir (quadro 2), a síntese do planejamento dos encontros e os instrumentos utilizados para a coleta de dados:

### Cronograma do experimento didático

Encontros	Ações Propostas	Objetivo	Instrumentos da Coleta de dados
1º	Apresentação/ conhecendo um pouco o grupo.../ escolha do conceito de matemática.	Conhecer o perfil do grupo e qual conteúdo matemático será o foco dos nossos estudos.	Gravação audiovisual; Diário de campo.
2º	Situação desencadeadora de aprendizagem – “Minha relação com a matemática”	Conhecer a relação dos docentes e o ensino da matemática.	Gravação audiovisual; Diário de campo.
3º	Linha do tempo - O Ensino da Matemática e eu	Entender a relação dos docentes com o ensino da matemática.	Gravação audiovisual; Diário de campo.
4º	Situação desencadeadora de aprendizagem. AOE – Carta Caitité (Anexo – 1)	Compreender os elementos que constitui a Atividade Orientadora de Ensino.	Gravação audiovisual; Folha de registro da resolução da AOE; Diário de campo.
5º	Retomada do processo de resolução da Carta Caitité.	Acompanhar a reação dos professores diante da história virtual; Compreender o processo histórico de criação de um conceito.	Gravação audiovisual; Diário de campo.
6º	Relato dos professores, sobre o que consideram uma “boa prática” para iniciar o conceito de frações.	Analisar a compreensão dos docentes sobre o conceito de fração.	Registro escrito da proposta; Gravação audiovisual; Diário de campo.
7º	Retomada da discussão sobre as propostas de ensino de fração. Situação desencadeadora de aprendizagem AOE – No Egito	Observar as argumentações dos professores em relação ao conteúdo e suscitar discussões sobre a exploração do conceito de fração no	Gravação audiovisual; Diário de campo.



	antigo...	processo de ensino.	
<b>8º</b>	Levantamento do que o grupo observou durante a realização da AOE “No Egito antigo...”.	Acompanhar a compreensão do conceito e discutir as adequações para o ensino da matemática no ensino fundamental; Compreender a relação da subunidade e a fração - Insuficiência números naturais	Gravação audiovisual; Folha de registro para a resolução da AOE; Diário de campo.
<b>9º</b>	Realização da síntese da AOE “No Egito antigo...”.	Compreender a gênese do conceito de fração e sua relação com as medidas - os números racionais e a medição;	Gravação audiovisual; Diário de campo.
<b>10º</b>	Situação desencadeadora de aprendizagem AOE – As famílias egípcias e o pagamento de impostos. (Comparação de frações)	Entender o conceito de Atividade Orientadora de Ensino como possibilidade de organização do ensino de matemática. Discutir as frações equivalentes.	Gravação audiovisual; Folha de registro para a resolução da AOE; Diário de campo.
<b>11º</b>	Socialização da resolução da situação desencadeadora de aprendizagem: As famílias e o pagamento de impostos e estudo do artigo de Rosa et al. (2013) intitulado “Relações entre as proposições para o ensino do conceito de frações com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico-Cultural”	Analisar a introdução do conceito de fração nos livros didáticos, tendo como foco central: a quantificação discreta e quantificação contínua das frações.	Gravação audiovisual; Diário de campo.
<b>12º</b>	Elaboração coletiva de uma AOE	Acompanhar o movimento do grupo	Gravação audiovisual;

		na elaboração da situação desencadeadora de aprendizagem.	Diário de campo.
<b>13º</b>	Socialização das propostas	Observar as colocações do grupo, em relação ao conceito de fração, intervir ou retomar ao conceito quando necessário.	Gravação audiovisual; Diário de campo.
<b>14º</b>	Preparação do material que será utilizado na AOE	Acompanhar o movimento do grupo na elaboração da situação desencadeadora de aprendizagem observando as mudanças em relação ao planejamento das ações propostas no último encontro.	Gravação audiovisual; Diário de campo.
<b>15º</b>	Socialização da avaliação final do trabalho desenvolvido sobre a organização do ensino de Fração	Observar as reflexões dos professores na avaliação da situação desencadeadora de aprendizagem realizada com os educandos; Confrontar com expectativas e mudanças da prática docente.	Gravação audiovisual; Diário de campo.

**Quadro 2 - Cronograma do experimento didático**

### 3.4. Metodologia de análise

Com a intenção de evidenciar esse processo de aprendizagem partimos, como já explicitado, do materialismo histórico dialético como princípio orientador desse trabalho. Segundo Cedro (2008, p.96), “a característica principal do método dialético é a de que o fenômeno estudado deve ser apresentado de tal modo que permita a sua apreensão em sua totalidade”, nessa tentativa de ser preservada a totalidade da unidade corroboramos com Moura (2000), quando ele afirma que:

Ao assumirmos as unidades estamos considerando-as como um elemento que explicita a regularidade do pensamento, o atuar sobre a complexidade da realidade e não como uma concepção desta. (MOURA, 2000, p.81)

Caraça (2002) indica que o recorte dessa totalidade, estabelece o que ele denominou de *isolado*, sendo “um conjunto de seres e fatos abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados. Uma secção da realidade, nela recortada arbitrariamente” (CARAÇA, 2002, p.105).

Cedro (2008) especifica que:

A ideia de *isolado* surge como uma ferramenta metodológica de análise, uma vez que, sabendo da impossibilidade de compreender de uma só vez a totalidade das relações, faz-se um recorte da realidade. (CEDRO, 2008, p. 112, grifo do autor).

Segundo Caraça (2002), esse recorte faz-se necessário para que compreenda nele todos os fatores importantes e relevantes para o fenômeno estudado.

O *isolado* apresenta-se como uma seção da realidade que conserva “todos os fatores que, ao se interdependerem, têm influência marcante no fenômeno a estudar” (MOURA, 2004, p. 267). Desse modo, o *isolado* abrande as propriedades do todo, sendo *isolado* para o estudo, mas integrante da sua totalidade pesquisada. Por esse motivo, optamos por trabalhar com o conceito de *Isolado* e *episódio* nessa pesquisa.

O *isolado*, nessa pesquisa, é compreendido como modos de focar as ações de aprendizagem docente no processo formativo e é constituído por episódios. Os episódios, por sua vez, são constituídos por um conjunto de cenas, que são selecionadas dentre os dados coletados com o intuito de revelar as ações da aprendizagem docente no processo de mudança na qualidade do pensamento: pensamento empírico para a aproximação do desenvolvimento do pensamento teórico.

Considerando a intenção de compreender *Como a organização do ensino da matemática, mais especificamente do conceito de Fração, a partir das contribuições da Teoria histórico-cultural e da Atividade Orientadora de Ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática, no quarto e quinto ano do ensino fundamental*, optou-se durante todo o processo priorizar os participantes que estivessem, naquele ano, trabalhando com os educandos dos quartos e quintos anos do ensino fundamental. Assim, ao final da coleta de dados, foram tomados para análise os dados obtidos junto a nove professores, sendo que quatro lecionavam para os educandos dos 4º anos e cinco para os 5ºanos. Daqui em diante denominados: Cleo, Fátima, Leo, Rute, Márcia, Cida, Rita, Ana e Nina.

Professores dos 4ºanos	Professores dos 5ºanos
Cleo	Márcia
Fátima	Cida
Leo	Rita
Rute	Ana
	Nina

Quadro 3 - Professores participantes da pesquisa.

Considerando os diversos momentos da coleta de dados e os diferentes instrumentos utilizados, organizamos a análise dos dados tendo como referência o nome fictício do professor, ano que está lecionando, o encontro coletado a informação e a indicação do instrumento utilizado, por exemplo, (Cleo, profa. 4º ano, E-1, ☉) para referirmos as informações obtidas da professora Cleo, que leciona para turma do quarto ano, as informações foram coletadas durante o primeiro encontro e o instrumento utilizado transcrição audiovisual.

Símbolos	Instrumento da coleta de dados
🎥	Transcrição da gravação audiovisual
👥	Folha de registro coletivo para a resolução da AOE
📅	Diário de campo

Quadro 4 - Legenda dos instrumentos da coleta de dados.

Retomando o que já foi exposto sobre o conceito de *Isolado*, corroboramos com Ribeiro (2011) ao dispor desse conceito “enquanto método e instrumento para o tratamento dos dados da pesquisa, no qual se colocam um conjunto de fatos, componentes de uma teia de elementos interdependentes.” (RIBEIRO, 2011, p. 83). Partindo dessa premissa, a análise está organizada no *Isolado: O movimento do pensamento teórico e a organização do ensino de frações*, por sua vez, dividem-se em episódios. Antes de apresentarmos os episódios que o compõe, destacamos que a escolha desse Isolado perpassa a compreensão da unidade dialética entre *forma e conteúdo*. Ambos os termos são entendidos aqui, como elementos presentes na aprendizagem docente, pois atuam no processo de desenvolvimento como opostos dialéticos, que se dispõem reciprocamente, manifestando-se no objeto, fenômeno ou no processo, sempre em movimento.

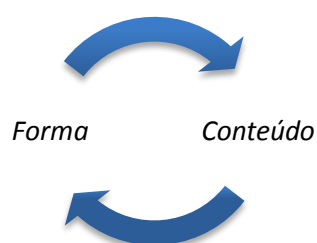


Figura 11 - Movimento Dialético

Nossa investigação considera que o *conteúdo* é o conhecimento científico do conceito de fração e a *forma* é a própria organização do ensino realizado pelo docente, compreendendo – os como elementos dissociáveis. Por isso, a opção por um único Isolado.

O Isolado é constituído por episódios, que como entende Moraes (2008), são classes de fatos que explicitam o fenômeno empiricamente. Na presente investigação, o Isolado **O movimento do pensamento teórico e a organização do ensino de frações** sé constituído por cinco episódios: I - Nos limites do visual empírico; II - Frações e seus significados; III - Atividade Orientadora de Ensino – No Egito Antigo; IV – AOE: As famílias egípcias e o pagamento de impostos; V - Análise, Reflexão e planificação das ações: Indícios da formação do pensamento teórico. Todos os episódios trazem elementos que evidenciam a relação entre forma e conteúdo. O quadro a seguir apresenta a organização do nosso processo de análise:

<b>Questão da pesquisa</b>	
<i>Como a organização do ensino da matemática, mais especificamente do conceito de Fração, a partir das contribuições da Teoria Histórico-Cultural e da Atividade Orientadora de Ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática, no quarto e quinto ano do ensino fundamental?</i>	
<b>Isolado</b>	<b>Episódios</b>
<b>Movimento do pensamento teórico e a organização do ensino de frações</b>	I - Nos limites do visual empírico
	II - Frações e seus significados
	III - Atividade Orientadora de Ensino: No Egito Antigo
	IV - Atividade Orientadora de Ensino: As famílias egípcias e o pagamento de impostos.
	V - Análise, Reflexão e planificação das ações: Indícios da formação do pensamento teórico.

**Quadro 4 - Organização dos dados: Isolado e Episódios**

Nesse processo de análise dos dados, objetivou-se apresentar evidências do movimento de aprendizagem docente na organização do ensino no conceito de fração, por meio de momentos que revelassem indícios da superação do pensamento empírico para o desenvolvimento do pensamento teórico. De acordo com Davidov (1988):

O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetual-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como experimento objetual sensorial peculiar. Depois, este experimento adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passar, com o tempo, aos experimentos realizados mentalmente. (DAVIDOV, 1988, p. 125)

Analisaremos o percurso formativo dos professores, participantes dessa pesquisa, que evidenciaram em suas falas e registros os vestígios dessa mudança, fundamentado nos elementos indicados por Davidov como características do Pensamento Teórico (análise, reflexão e planificação teórica das ações), assim, utilizamos como referência as pesquisas de Moraes (2008) e Ribeiro (2011) que apresentam esse movimento em suas análises.

#### **4. ISOLADO: O MOVIMENTO DO PENSAMENTO TEÓRICO E A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE FRAÇÃO**

Consideramos que a formação do pensamento teórico, no âmbito escolar está estritamente vinculada a organização do ensino. Desse modo, acreditamos ser muito importante a realização de situações desencadeadoras de aprendizagem para a formação desse pensamento, pois como afirma Davidov (1988) o pensamento teórico deve advir das teses gerais da área do saber, e não dos casos particulares; é preciso buscar a célula, a gênese e a essência do conceito.

Partindo dessa premissa, realizamos duas situações desencadeadoras de aprendizagem, denominadas “No Egito antigo...” e “As famílias egípcias e o pagamento de impostos”. Para a realização dessas propostas utilizamos como base os princípios da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), conforme já apresentados no capítulo 1. Tivemos como objetivo trabalhar a partir da história do conceito, pois como afirma Moura (1996): esse é um pressuposto básico para a elaboração das situações desencadeadoras de aprendizagem porque se fundamenta no modo de o homem fazer e pensar os elementos da matemática como produção histórica.

O nosso objetivo, com as situações desencadeadoras de aprendizagem, era possibilitar que os professores compreendessem a gênese histórica do conceito da fração. Como destaca Rosa et al. (2013), na perspectiva histórico-cultural os números fracionários e o campo dos números racionais surgiram da necessidade humana de medir. Assim, compreende-se que o ensino do conceito de fração deve considerar essa necessidade na organização de situações desencadeadoras de aprendizagem desenvolvendo o conceito com base na sua gênese histórica.

Conforme análise dos diálogos e das propostas elaboradas pelos professores, os quais não evidenciam uma relação do ensino das frações com os seguintes elementos: o conceito histórico das frações, situações que permitam o desenvolvimento da quantificação contínua que é própria do conceito, a comparação de grandezas, sua representação geométrica de área e sua localização na reta numérica. De acordo com referencial teórico adotado nessa pesquisa, os elementos citados acima, são considerados essenciais para favorecer o desenvolvimento do pensamento teórico sobre o conceito da fração. Os episódios, desse Isolado, focam o desenvolvimento da



Atividade Orientadora de Ensino e analisam a compreensão dos professores, participantes da pesquisa, em relação ao conceito de fração e a organização do ensino.

#### **4.1. Episódio I – Nos limites do visual empírico**

Este *Episódio* analisará as propostas de ensino do conceito de fração elaboradas pelos professores dos quartos e quintos anos do ensino fundamental, participantes dessa pesquisa, levantamento que aconteceu no início do experimento didático.


As propostas de introdução do conceito de fração apresentadas, pelos professores, evidenciam situações que propiciam a concepção de fração nos limites do visual empírico, como por exemplo, situações envolvendo pizzas ou chocolates, onde o aluno deve contar quantos pedaços tinha (inteiro) e quantos pedaços foram “comidos”. Como indica a fala da professora Ana do quinto ano:

*Eu particularmente aproveito assim as figuras que eu tenho para usar; é aquilo de dividir pizza, dividir chocolate, de dividir comida. (Ana, profa. do 5º ano, E-6, ☉)*

No relato, citado acima, é apresentado o conceito de fração apenas relacionado à quantificação discreta. Neste caso, apesar da relação parte-todo estar presente, o educando simplesmente conta às partes que compõe a figura – quantificação discreta – pois, ao apresentar uma figura previamente dividida em partes iguais, o estudante só precisará contar para identificar o total de partes ou o número de partes distintas. Dessa forma, ao utilizar a pizza ou o chocolate desconsiderando-se a sua área, está discretizando o contínuo e induzindo os educandos a usar apenas a contagem para resolver o problema proposto, não estabelece nenhuma relação com os aspectos essenciais do conceito de fração, que é a quantificação contínua. Desse modo, a proposta apresentada pela professora não favorece o desenvolvimento do pensamento teórico, uma vez que essa proposta coloca o aprendizado do conceito, como destaca Rosa et al. (2013), unicamente “nos limites do visual empírico”, além de trabalhar somente com frações menores que uma unidade, “não atingem as abstrações científicas próprias do conceito de fração” (ROSA et al. 2013, p.235). Esse entendimento do conceito esteve presente no 6º encontro, durante os relatos e registros dos professores,

sobre o que consideram uma “boa prática” para iniciar o conceito de frações, movimento de produção que antecedeu a participação do grupo nas Atividades Orientadoras de Ensino.

Como podemos observar as propostas a seguir, elaboradas pelos professores durante o 7º encontro, evidenciam que a organização do ensino para esses professores estava naquele momento ancorada nas características do pensamento empírico, pois utilizaram-se de procedimentos intuitivos, em que a compreensão da fração estava apenas vinculada a dimensão utilitária e visual, o que é notório nos trechos em destaque dos registros expostos abaixo:


<p><b>Proposta elaborada por: Leo, Fátima, Cléo e Rute, professores dos 4º anos, E-6, </b></p>
<p><b>Descrição da proposta:</b></p> <p>Primeiro, <u>DESENHO UMA PIZZA NA LOUSA, DIVIDIDA EM OITO PEDAÇOS. EXPLICO CADA PEDAÇO O QUE REPRESENTA DA PARTE INTEIRA.</u> Então, apago um pedaço da pizza e pergunto quanto esse pedaço representa e escrevo na lousa.</p>
<p><b>Objetivo dessa proposta:</b></p> <p>Se <u>FAMILIARIZAR COM AS IMAGENS E AS NOMENCLATURAS DAS FRAÇÕES.</u></p>
<p><b>Os educandos aprendem:</b></p> <p>Tirar partes de um todo.</p>

**Quadro 5 - Proposta dos professores do quarto ano.**

Os professores ao descreverem essa proposta, como a mais adequada para iniciar o estudo das frações, junto aos seus estudantes do quarto ano do ensino fundamental, e definirem como objetivo principal “FAMILIARIZAR COM AS IMAGENS E AS NOMECLATURAS DAS FRAÇÕES” demonstram que tanto o conhecimento sobre o conceito das frações, quanto à organização do ensino estão ancorados no pensamento empírico, pois o conhecimento sobre o conceito está baseado na observação e na representação concreta do objeto (DAVIDOV, 1982). Dessa forma, limita o conceito de fração a dimensão da quantificação discreta, como evidenciando na descrição da proposta “DESENHO UMA PIZZA NA LOUSA, DIVIDIDA EM OITO PEDAÇOS”,

dessa maneira os estudantes só terão como desafio contar os oitos pedaços de pizza.

Na proposta a seguir, elaborada pelas professoras do quinto ano com o mesmo intuito de introduzir o conceito de frações para as turmas em que lecionam, também não distanciaram do que foi proposto pelos professores do quarto ano. Como podemos observar:

<p><b>Proposta elaborada por: Nina, Cida e Márcia, professoras dos 5º anos, E-6,</b> </p>
<p><b>Descrição da proposta:</b></p> <p>Leitura deleite “Doce Frações”, livro de Luzia Faraco Ramos Faifi.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizando a <u>REPARTIÇÃO DE UM ALIMENTO, CONSIDERANDO ELE COMO 1 INTEIRO E SUAS PARTES COMO A FRAÇÃO.</u></li> <li>• O uso de um papel, onde a <u>CADA DOBRA DO MESMO REPRESENTA UMA FRAÇÃO.</u></li> </ul> <p>Solicitando que <u>PINTEM A QUANTIDADE ESTIPULADA</u> pelo professor.</p>
<p><b>Objetivo dessa proposta:</b></p> <p>Que o todo pode ser fracionado e de como é a representação através da fração.</p>
<p><b>Os educandos aprendem:</b></p> <p>Que o inteiro pode ser dividido e representado numericamente (quando dividido em partes iguais).</p>

**Quadro 6 - Propostas dos professores do quinto ano.**

Essa proposta de organização do ensino no conceito de fração está ancorada “nos limites do visual empírico”, constituindo-se de situações que evidenciam apenas a quantificação discreta das frações, aproxima-se das particularidades do pensamento empírico em que o conhecimento está baseado na observação e na representação concreta do objeto (DAVIDOV, 1982), como aquele conhecimento pautado na utilização de exemplos associados a alguma classe formal e a comparação dos objetos relacionados apenas as suas características comuns.

Observa-se que a introdução ao conceito de frações presentes nas propostas

elaboradas pelos professores e também nos livros didáticos analisados no capítulo 2 apresenta o conceito de forma superficial, com propostas de contagem sem relacionar a gênese do conceito e a comparação de grandezas que é próprio desse conceito.

Na fala da professora Ana, podemos destacar elementos característicos do pensamento empírico sobre o ensino da fração, O conhecimento do objeto está baseado, apenas na observação.

*[...] utilizar fração não é uma coisa comum, não faz parte de a nossa vida ficar falando: "me dá um terço desse chocolate...né? me dá um quinto desse chocolate". Ninguém usa muito isso, então acho que às vezes se torna difícil por conta disso. Por isso, até às vezes o desenho da pizza ajuda, porque não tem um significado a mais do que aquilo. É o que a gente apresentar... Eles irão acreditar no que a gente apresentar. (Ana, profa. do 5º ano, E – 7, ☉)*

Nessa fala, podemos destacar que a professora Ana acredita que para o estudante chegar à formação do conceito, é apenas necessário apresentar os aspectos externos, as representações que valorizam as propriedades comuns do objeto e as noções intuitivas do conceito (DAVIDOV, 1988). No entanto, tais escolhas evidenciam a materialização do pensamento empírico.

Esses elementos também estiveram presentes nos demais relatos dos professores, o qual a compreensão do conceito de fração estava apenas vinculada a sua representação gráfica do conceito. Sendo a divisão de alimentos e figuras geométricas, as representações mais usadas pelos professores no ensino do conceito.

*Eu trabalho oralmente as frações, exemplo, metade dos alunos vem para esse lado e metade para o outro lado. E dividir em quatro partes, por exemplo, uma fruta é algo do cotidiano. Ao falar para eles a metade de uma fruta, (...) você oralmente está trabalhando a fração. (Fátima, profa. do 4º ano, E – 7, ☉)*

Foi possível analisar que as propostas de organização do ensino da fração, baseada nessas representações gráficas, marcaram o processo de aprendizagem desses professores.

*Eu aprendi frações de maneira tradicional, tinha que decorar pronto e acabou. [...] quando eu comecei a dar aula, também ensinava meus alunos de uma maneira tradicional. Sempre como a Ana falou, usava chocolate ou pizza. Depois que eu aprendi a ter uma noção de como trabalhar frações com a escala de cuisenaire, com medidas. (Rute, profa. do 4º ano, E - 6 ☉)*

Após o relato da professora Rute, a professora Ana comenta de forma descontraída:

*Eu posso colocar na forma de um chocolate? (Ana, profa. do 5º ano, E - 6, ☉)*

Ela refere-se à utilização da escala de cuisenaire e a possibilidade de usar o recurso da medida no ensino de fração. Esse comentário demonstra o pensamento empírico sobre o conhecimento do conceito de fração e certa dificuldade em pensar o ensino da fração de outra maneira, que supere a representação concreta do objeto.

Novamente, estão presentes algumas particularidades do pensamento empírico apresentadas por Davidov (1982): O conhecimento do objeto está baseado apenas na observação e na necessidade da representação concreta do objeto. Não demonstrando a necessidade de expressar o objeto de estudo em forma de um conceito, de modo que compreenda a sua essência, superando a mera observação das propriedades superficiais, observáveis e singulares (DAVIDOV, 1988). Essa fala, também nos remete ao que Leontiev (1978) expõe sobre o conceito de Atividade, que se constitui a partir da necessidade, do objeto e do motivo, o qual movimenta a ação da atividade do sujeito. No entanto, observamos que esses elementos da Atividade ainda não foram mobilizados na professora Ana.

As propostas expostas pelo grupo docente, conforme já explicitado, evidenciam apenas a aparência do conceito e sua fundamentação nos elementos do pensamento

empírico. Entretanto, tais propostas desenvolvidas em sala de aula pelos docentes, muitas vezes, são validadas pelos livros didáticos, como o modo mais adequado de ensinar esse conceito. Como podemos notar no discurso dos professores:

*Os livros dispõem dessa forma também, sempre fraciona primeiro as figuras (...).* (Nina, profa. do 5º ano, E – 7, ☉)

O grupo concorda com essa afirmação e a professora Fátima e a professora Cleo continuam relatando que os livros didáticos utilizam da quantificação discreta no ensino de frações:

Professora Fátima: - *Essas explicações são as que têm lá no livro.* (Fátima profa. 4º ano, E – 7, ☉)

Professora Cleo: - *(...) pior de tudo é que a gente não aprendeu a ensinar as frações, em faculdade nenhuma, em magistério nenhum. A gente não aprendeu a passar para o aluno a maioria dos conceitos de matemática. Lá é o básico do básico, a gente sai de lá assim: pega o livro e o que estiver no livro você repassa.* (Cleo, profa. do 4º ano, E – 7, ☉)

Tais relatos confirmam o que Rosa et al. (2013) alerta em suas pesquisas, ou seja, que a introdução dos números fracionários nos livros didáticos ou apostilas se apresenta de forma superficial, com exemplos de situações de contagem (quantificação discreta), limitando-se a contextos do cotidiano, sem estabelecer sentido aos alunos, afastando-se da gênese do conceito de frações e das situações que permitam o desenvolvimento da quantificação contínua, a comparação de grandezas, sua representação geométrica de área e sua localização na reta numérica.

## 4.2. Episódio II – Frações e seus significados

Neste *Episódio* evidenciamos que transitar por diferentes significados do conceito de fração constitui-se como parte do desenvolvimento e estruturação do pensamento teórico sobre esse conceito. No entanto, durante o desenvolvimento do experimento didático evidenciou-se que nem todos os professores demonstraram conhecer os diferentes significados das frações. Essa fragilidade sobre o conceito foi discutida no sétimo e décimo primeiro encontro e são apresentadas nos diálogos a seguir:

*[...] até eles chegarem ao conceito de fracionar com uma quantidade, a gente começa com uma fração de um todo e geralmente é um objeto, uma figura. (...) é mais simples. Mas, se você chegar e falar assim: “Me dá três quartos de 12” até chegar ao resultado... Parou ...aí não vai mais.*

*Quando a gente começa a fracionar quantidades, acho que para eles é muito confuso, porque a gente começa por fracionar figuras e quando precisa fracionar quantidades é muito mais complicado. (Nina, profa. do 5º ano, E -7,☉)*

A professora Nina, tenta explicar nessa fala a dificuldade que os seus alunos têm em compreender o significado da fração em sua relação Quociente, ou seja, em que a fração não representa partes do inteiro ou da unidade, mas algo que será dividido em um determinado número de partes. Porém, a dificuldade está presente na compreensão da própria professora, pois no seu relato evidencia acreditar que, ao trabalhar a fração na sua significação Parte-Todo os educandos compreenderão os outros significados da fração, como no caso apresentado por ela, à relação com o significado de Quociente. No entanto, como destaca Lopes (2008, p. 08) “nem todas as ideias tem sido contempladas no tratamento das frações (...) o que é um indicador de lacunas sérias na aprendizagem robusta do conceito”, pois a compreensão dos números racionais é estabelecida a partir dos seus diferentes significados: parte-todo, medida, quociente, razão e operador.

Após a fala da professora Nina, a professora Ana tenta justificar as dificuldades dos estudantes em entenderem os diferentes significados presentes no conceito:

*Mas, a gente não passa de meio, não é? Eu tenho dúvida, dividir em grupos é uma fração ou uma divisão? É a mesma coisa ou não?* (Ana, profa. do 5º ano, E – 7, ☉)

Nesse momento, os participantes começam a discutir ao mesmo tempo, principalmente com o colega que está mais próximo. A pesquisadora observa a necessidade de problematizar a dúvida da professora Ana, para que todos pudessem participar do debate e serem ouvidos.

*O que vocês acham? Se pensarmos nessa situação que a professora Ana apresentou, estamos utilizando o conceito de fração ou divisão?* (Pesquisadora, E -7, ☉)

No primeiro momento, os professores não chegam a um consenso o grupo apresenta posicionamentos diferentes diante desse conflito. A maioria responde que se trata de uma divisão e outros respondem que divisão e fração são compreendidas como sinônimos. E apresentam alguns argumentos:

Professora Rita: - *São as duas coisas, depende da situação.* (Rita, profa. do 5º ano, E – 7, ☉)

Professora Cida: - *Depende. Se só dividir o número é divisão; quando eu vou falar que esse grupo pertence a um todo, esse número vira fração, porque eu vou utilizar uma parte dessa divisão. Exemplo: um quarto relacionado à parte que eu utilizei do inteiro, assim é uma fração.* (Cida, profa. do 5º ano, E – 7, ☉)

Observa-se que nesse momento o grupo começa a perceber os vários significados que envolvem o conceito frações: parte-todo, medida, quociente, razão, entre outros. Neste contexto de compreender os significados das frações, a professora Cida faz uma observação pertinente à discussão, contribuindo com a elaboração conceitual do grupo, ao afirmar que “*Se só dividir o número é divisão.*”, confirmando o que Silva (2004) relata sobre situações equivocadas do uso da linguagem de frações, como é manifestado no problema em que a criança tem como desafio de distribuir 25 bolinhas de gude para três colegas, em que a distribuição em partes iguais não é possível, pois sobrar uma bolinha de gude e se houver a tentativa de dividi-la perderá a



sua propriedade física, e não será mais bolinha e sim pedaços de vidro. A intenção com esse exemplo é evidenciar o uso inadequado da fração, pois no caso citado acima “na verdade não estamos usando frações, mas sim a divisão de naturais” (SILVA, 2004, p. 03). Dessa maneira, o uso apropriado da linguagem fracionária está relacionado ao seu significado quociente, quando a quantidade a ser distribuída apresenta um número que seja múltiplo da quantidade de partes que se deseja distribuir ou repartir.

Nas próximas falas das professoras Fátima, Rute e Márcia, observamos a dificuldade enfrentada pelos professores na organização do ensino do conceito de fração de modo a abranger os diferentes significados desse conceito.

Professora Fátima: - *Quando estamos fazendo um trabalho com frações, nem a gente se dá conta que está mostrando as diferentes formas da fração.* (Fátima, profa. do 4º ano, E – 7, ☉)

Professora Rute: - *Para a gente é muito complicado, até porque a maioria aqui passou por um ensino bem tradicional das frações, e agora em sala de aula para você ensinar esse outro olhar, o real significado das frações (...) não é fácil para o próprio professor. Agora, teria que rever novamente todos os meus conceitos porque eu ainda tenho na cabeça aquele ensino tradicional em relação às frações. Eu acho que é um tema bem complexo.*  
(Rute, profa. do 4º ano, E -7, ☉)

Professora Márcia: - *É preciso desconstruir o que já está decorado pelo professor.*  
(Márcia, profa. do 5º ano, E -7, ☉)

Podemos destacar nesse diálogo, o quanto os conhecimentos sobre os significados das frações precisam de um estudo mais aprofundado pelos professores para que ocorra a superação do pensamento empírico. Conforme Davidov (1982), o conhecimento teórico constitui o objetivo principal da atividade de ensino, pois é pela apropriação do conhecimento científico que se estrutura a formação do pensamento teórico. Nesse momento, percebemos que o grupo iniciou um primeiro movimento de

análise e reflexão sobre as ações desenvolvidas acerca do ensino do conceito de fração, movimento que apresenta indícios de constituição do pensamento teórico. No décimo primeiro encontro, essa discussão sobre a importância de o professor ter o conhecimento sobre os significados das frações e sobre a quantificação discreta e contínua se manifestam novamente:

Professora Nina: - *Olha o nosso livro, às vezes, ele traz um conceito (que eu até mostrei para as meninas) que para mim está errado, porque tem uma parte lá da fração que fala assim: Entrando com a ideia de divisão, aparece assim: uma fração  $1/2$ , para a criança entender que seria 1 dividido, se a gente está falando para a criança o tempo todo que é pegar o inteiro e dividir em dois que daria  $1/2$  e  $1/2$ , como é que vou falar que aquele 1 seria dividido para 2? (Nina, profa. do 5º ano, E- 11, ☉)*

Professora Rita: - *Mas, é assim! Porque a partir daí explica que está fracionado. (Rita, profa. do 5º ano, E – 11, ☉)*

Professora Nina: - *Mas, você concorda que são duas ideias totalmente diferentes? Primeiro eu falo que  $1/2$  é metade de um inteiro, depois eu falo que  $1/2$  é pegar um inteiro e dividir por 2. Aquela fração quer dizer isso? (Nina, profa. do 5º ano, E – 11, ☉)*

Professora Rita: - *Mas, é isso que quer dizer. Porque se é 1 dividido por 2, cada pessoa vai ficar com a metade. (Rita, profa. do 5º ano, E – 11, ☉)*

Professora Nina: - *Mas, quando você fala da fração, você não fala isso, fala meio. Eu achei confuso. Porque eu entendi o que queria dizer, mas quando for uma fração  $2/4$  e eu pedir para ele pegar  $1/4$  ele vai achar que terá que dividir 1 por 4. Porque se eu explicar desse jeito vai excluir o que já tinha falado. (Nina, profa. do 5º ano, E – 11, ☉)*

A professora Nina, ao apresentar as suas inquietações acerca da compreensão do conceito de fração, no seguinte trecho da sua fala “*Primeiro eu falo que  $1/2$  é metade de um inteiro, depois eu falo que  $1/2$  é pegar um inteiro e dividir por 2*”, percebemos a dificuldade em compreender os significados das frações em sua dimensão Parte-todo, a concepção de Quociente e, principalmente, a dificuldade em compreender a relação da quantificação discreta e contínua nas frações. Na fala da professora Nina, estão presentes essas duas dimensões (discreto e contínuo), no trecho “ *$1/2$  é metade de um inteiro*” está relacionada à quantificação contínua a ideia de medida de uma determinada área. E no trecho seguinte “ *$1/2$  é pegar um inteiro e dividir por 2*”, refere-se à ideia da quantificação discreta – limitando a fração a dimensão da contagem de objetos diversos.

A fragilidade no entendimento do conceito pode ser justificada, pelo fato do ensino do conceito de fração estar fundamentado nos princípios do pensamento empírico. Segundo Rosa, Moraes e Cedro (2010),

O pensamento empírico possibilita ao sujeito uma atividade cognitiva que lhe assegure a separação dos atributos dos objetos ou fenômenos e sua designação, incluindo aí aqueles que em determinado momento são possíveis de serem observados e que somente podem ser conhecidos indiretamente por meio de deduções. (ROSA, MORAES e CEDRO, 2010, p. 73)

Desse modo, a compreensão do conceito de fração fica restrita às representações gerais não possibilitando a percepção do próprio conceito, o qual ocorre dentro de um processo formativo do sistema, da integridade e do concreto que revelam as peculiaridades e conexões dos objetos singulares (DAVIDOV, 1982). O domínio e reflexão sobre diferentes significados e dimensões (discreta e contínua) das frações possibilita ao sujeito construir e identificar os números racionais na compreensão e resolução de diferentes situações.

Podemos também, destacar no diálogo transcrito acima, evidências do movimento de análise e reflexão, ações próprias do processo de mudança do tipo de pensamento. Os professores manifestaram a necessidade de analisar e questionar o seu próprio conhecimento acerca do conceito de fração e sobre os materiais que utilizam como apoio ao ensino.

### 4.3. Episódio III – Atividade Orientadora de Ensino: No Egito Antigo

A primeira situação desencadeadora foi “No Egito antigo...”, proposta inspirada nas pesquisas de Catalani (2002), Dias (2007) e Perlin (2014), apresenta a relação entre medir grandezas contínuas e o conceito de fração.

A descrição da situação desencadeadora de aprendizagem, descrita no capítulo 3, parte da discussão de uma situação que produz um problema historicamente situado. Nessa situação desencadeadora de aprendizagem os professores chegaram à constatação da insuficiência dos números inteiros quando se depararam com a não reprodução da unidade uma quantidade inteira de vezes, criando-se as subunidades, ou seja, a divisão da unidade em partes iguais, como é possível analisar nos registros produzidos pelo grupo:

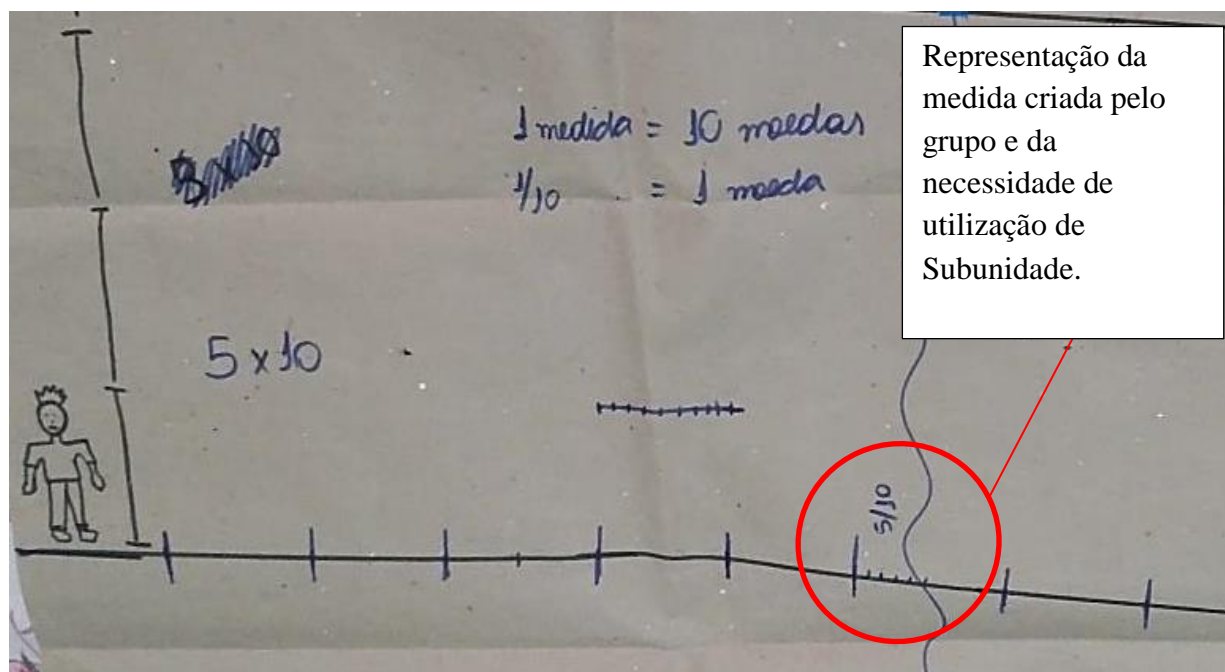



Figura 12 - Resolução da AOE - No Egito antigo. Registro dos professores dos 4º anos.

No registro da resolução da AOE – No Egito antigo, os professores, revelam a necessidade de estabelecer uma unidade de medida para dividir as terras às margens do rio Nilo, como podemos observar no registro, esse grupo utilizou como referência a representação do tamanho de figura humana, que denominaram - estatura do rei. A partir da elaboração dessa unidade de medida, o grupo realizou a marcação no papel para indicar o tamanho do terreno, que tinha correspondência de 5 reis (unidade de medida) de largura por 10 reis de comprimento. Na resolução do segundo dilema:

representar o comprimento da porção de terra, antes da cheia e depois da cheia do rio Nilo. Os participantes desse grupo depararam com a seguinte situação: a unidade não se reproduz completamente na grandeza a ser medida.

Originou-se aqui um dilema, pela não reprodução da unidade uma quantidade inteira de vezes. Segundo Caraça (1989), ao nos depararmos com uma situação de dilema é que se avança a níveis superiores de conhecimento, pois a formulação de caminhos, diante de uma dificuldade, possibilita a compreensão e apropriação do conceito.

A partir dessa constatação, a não reprodução da unidade uma quantidade inteira de vezes, que o grupo chegou à seguinte conclusão:

*Estipulamos que a unidade de medida seria o tamanho do rei, sendo assim cada terreno seria a medida de 5 reis por 10 reis de comprimento. Com a cheia do rio, observou-se que a água poderia invadir uma medida não exata de um rei, então pensamos em subdividir essa medida em 10 considerando os dedos das nossas mãos. (registro dos professores dos 4º anos, E - 8, )*


Os professores demonstram em seus registros, o entendimento de elementos que constitui o conceito de fração, aproximando-se das particularidades do pensamento teórico em que “a ação de construção e transformação do objeto mental constitui o ato da sua compreensão e explicação, o descobrimento da sua essência” (DAVIDOV, 1988, p. 127). O procedimento de resolução da situação desencadeadora de aprendizagem que demonstra essa particularidade do pensamento teórico, também esteve presente nos registros de resolução dos professores do quinto ano, como podemos observar a seguir.

Na resolução da situação desencadeadora de aprendizagem, os professores experienciaram o movimento lógico histórico próprio do conceito, como é evidenciado nos registros coletivos dos professores dos quinto anos. Para medir os terrenos à margem do Rio Nilo sentiram a necessidade de estabelecer a unidade de medida e identificar quantas vezes essa unidade, grandeza, acomodava-se dentro do que se queria medir.

Na resolução da primeira situação – distribuição da terra entre as famílias egípcias – o grupo utilizou como unidade de medida a braçada, conforme representado pelo desenho que compõe o registro do grupo. Durante a resolução da segunda problematização – representar o comprimento do terreno após a cheia do rio Nilo – depararam-se com o conflito onde a unidade de medida estabelecida não cabia de forma inteira no terreno. O enfrentamento desse conflito foi decisivo para se reconhecer que o campo dos números inteiros é insuficiente para medir, sendo necessária sua ampliação, criando-se então a subunidade (DIAS, MORETTI, 2010). Conforme é evidenciado no registro do grupo:

*Utilizamos a braçada como padrão, dividimos a braçada em palmos e os palmos em polegadas.*

*1 braçada = 8 palmos*

*1 palmo = 10 polegadas.* (registro dos professores dos 5º anos, E – 8, )

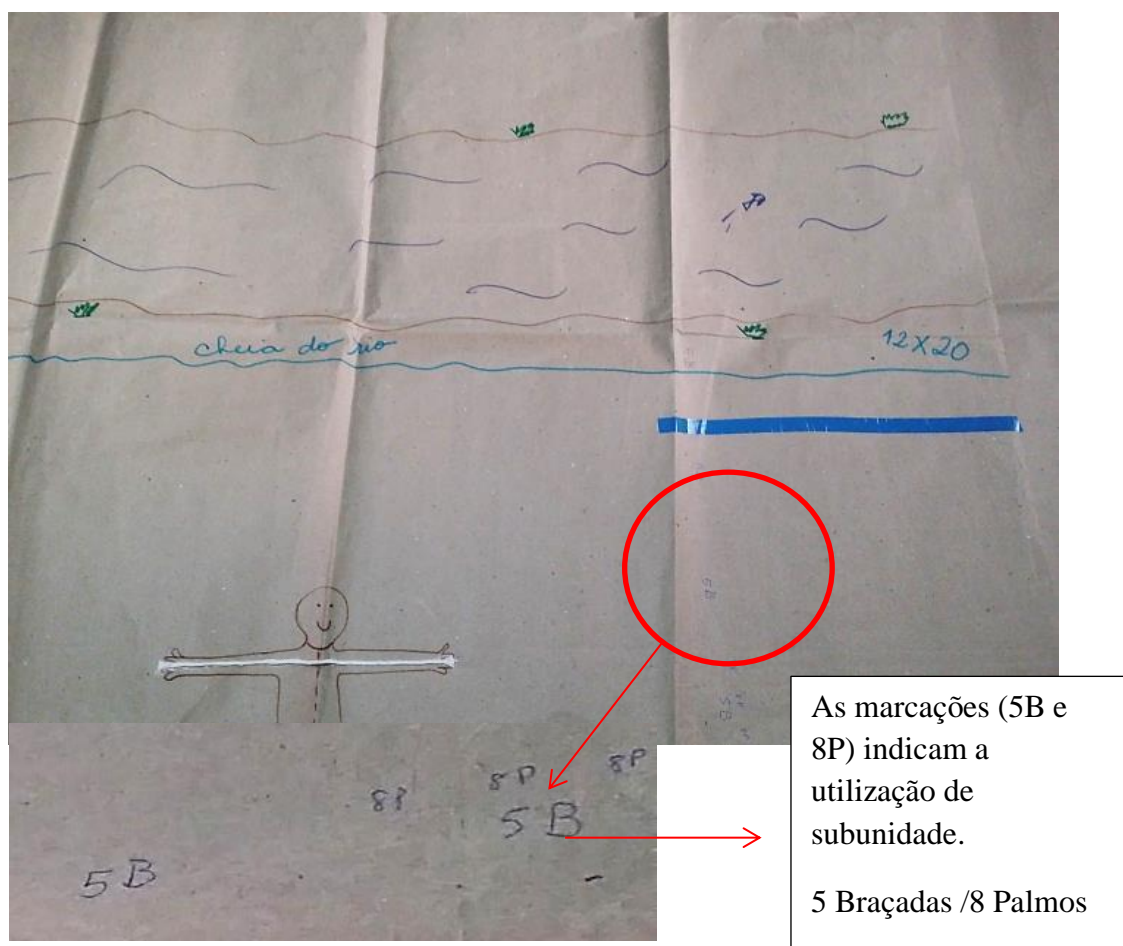


Figura 13 - Resolução da AOE - No Egito Antigo. Registro dos professores dos 5º anos.

A situação desencadeadora de aprendizagem “No Egito antigo” possibilitou a compreensão de elementos essenciais do conceito de fração, criação de subunidade e a comparação de grandezas, superando a simples observação das propriedades particulares e observáveis do ensino de frações baseado nas características do pensamento empírico.

A relação entre a História da Medida e o surgimento das frações apresenta-se como um dos elementos centrais para o ensino de fração e é considerada como a síntese histórica do conceito, sendo um dos componentes da proposta teórica-metodológica da Atividade Orientadora de Ensino, e que evidencia o quanto a proposta da AOE contribui na organização do ensino de matemática, pois possibilita a apresentação de elementos essenciais dos conceitos que serão ensinados.

#### 4.4. Episódio IV– Atividade Orientadora de Ensino: As famílias egípcias e o pagamento de impostos

Este *Episódio* tem como objetivo evidenciar o estudo do conceito de fração relacionado à grandeza contínua e a equivalência das frações a partir da situação desencadeadora de aprendizagem, denominada “As famílias egípcias e o pagamento de impostos”, descrita no capítulo 3.

Essa história virtual atende a dimensão histórica como uma das formas de perceber o processo histórico-cultural do conceito (MOURA et al. 2010). A proposta, também, abordou a possibilidade de vivenciar o processo de construção histórica do conceito. . Movimento presente no processo de resolução da situação desencadeadora de aprendizagem como podemos observar nos registros a seguir:

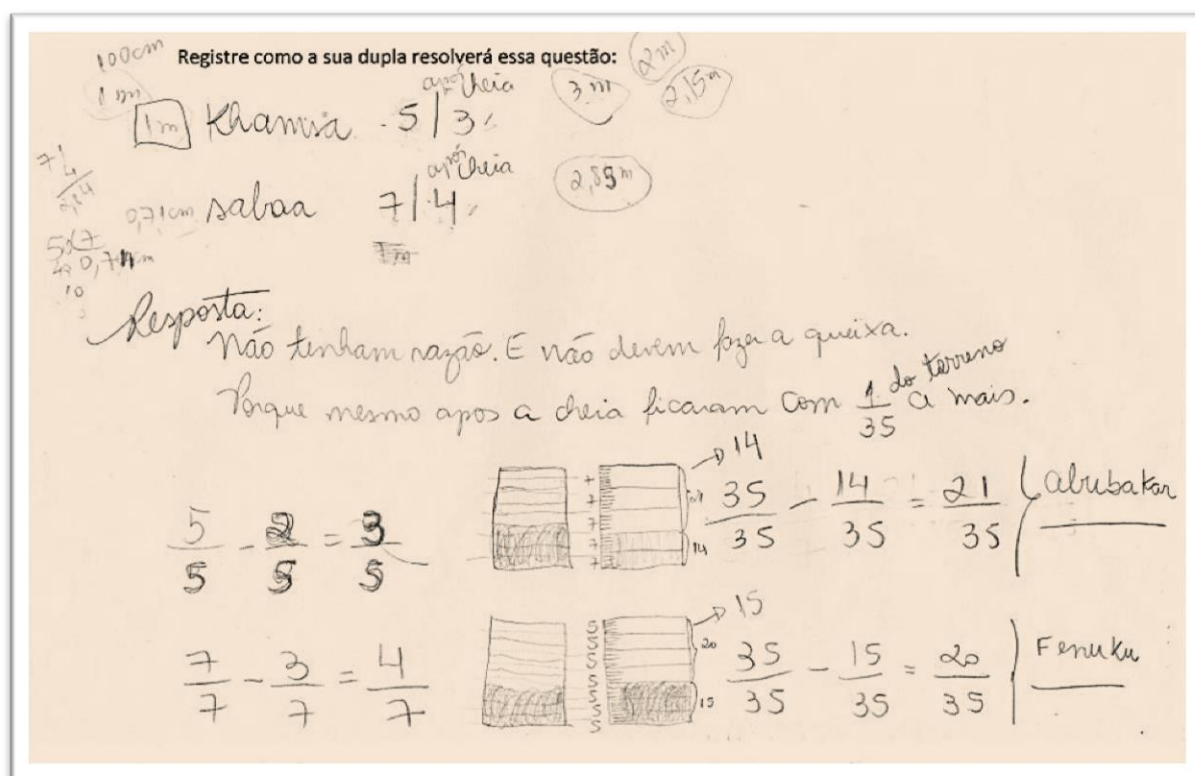


Figura 14 - Fátima professora do 4º ano

Na resolução dessa AOE, a professora Fátima demonstra a tentativa de superação da utilização, unicamente, da regra convencional de calcular o mínimo múltiplo comum - MMC dos denominadores, para encontrar a fração equivalente, como está evidenciando no seu registro de resolução.



No entanto, a superação da utilização da regra aconteceu de forma mediada, os professores demonstraram grande resistência em não utilizar a regra para determinar a fração equivalente, como destaca Lopes (2008, p. 07) “a aprendizagem de frações não se dá com definições prontas” é preciso explorar e compreender a fração equivalente. Conforme o registro no diário de campo:

*Na resolução da AOE “As famílias egípcias e o pagamento de impostos”, os professores argumentaram que a proposta estava muito complexa, pois não conseguiam pensar na resolução da fração equivalente sem o uso da regra. (pesquisadora, E – 11, 10/05/2011)*

Esse registro no diário de campo evidencia que a dificuldade para chegar à resolução da situação desencadeadora ocorreu devido os professores se sentirem “presos” a utilização de regras, a mecanização do ensino da matemática ancorado no pensamento empírico.

No registro da professora Ana, observamos na parte superior, também a tentativa da utilização de regras convencionais. No entanto, na parte inferior do seu registro há a tentativa de outras formas de cálculo.

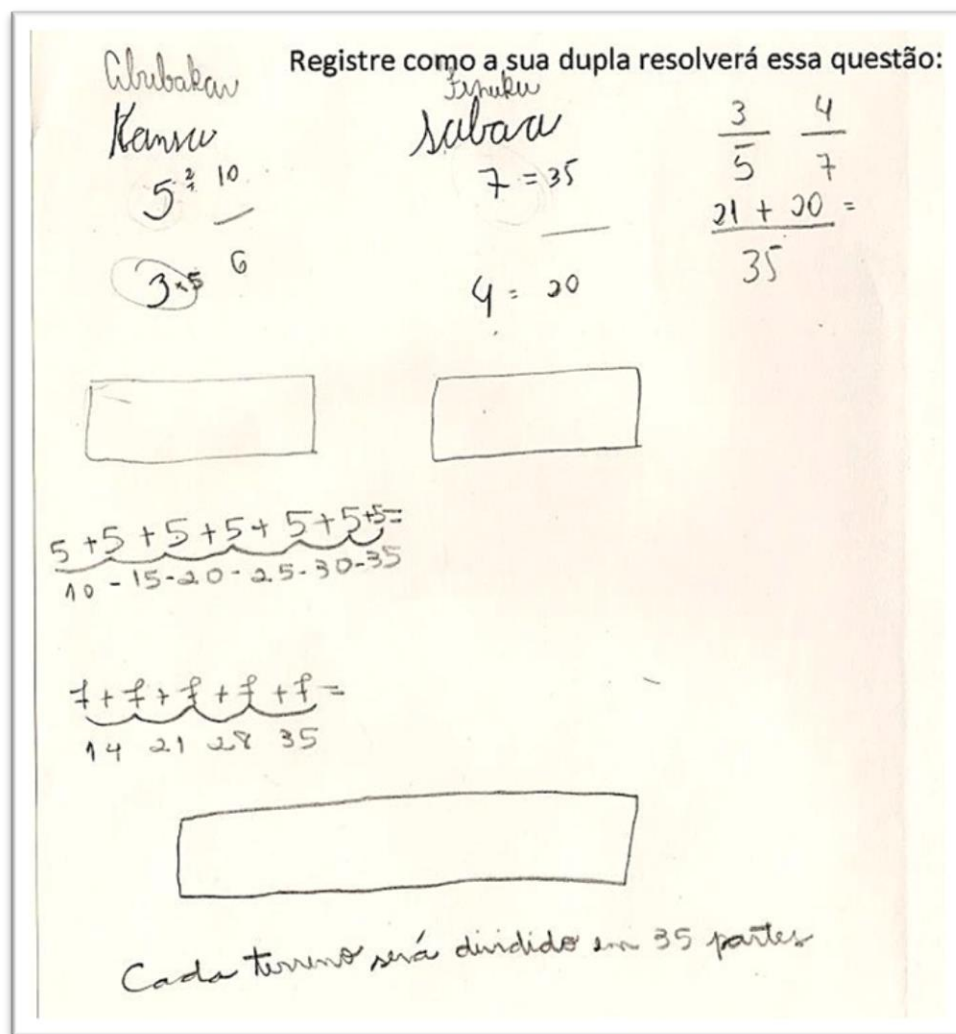


Figura 15 - Ana professora do 5º ano

Acreditamos que a situação desencadeadora de aprendizagem apresentada pode auxiliar o indivíduo na compreensão das regras acerca dos números fracionários com significado, pois como afirma Silva e Almouloud (2008, p. 76):

É necessário descontextualizar as situações para que as habilidades com o cálculo se desenvolvam independente de representações figurais, pois o aluno deve aprender significativamente tais regras e não memorizá-las. (SILVA e ALMOULOU, 2008, p. 76)

O que queremos enfatizar, é que o conceito de fração deve ser ensinado e aprendido a partir de situações desencadeadoras que promovam a aprendizagem significativa, fazendo sentido ao sujeito.

Na realização de cada situação desencadeadora de aprendizagem proposta, buscou-se o conhecimento científico do conceito para favorecer o desenvolvimento do pensamento teórico. A AOE - As famílias egípcias e o pagamento de impostos apoia-se

em uma das principais características desse pensamento, que segundo Rosa, Moraes e Cedro (2010, p. 75) é a “transformação do saber em teoria desenvolvida mediante dedução e explicação; elaboração por meio da análise do papel e da função de certa relação entre as coisas no interior de um sistema”.

Procuramos nos episódios *Atividade Orientadora de Ensino: No Egito Antigo e AOE - As famílias egípcias e o pagamento de impostos*, reconhecer as ações que favorecem o desenvolvimento do pensamento teórico, por intermédio da realização de operações mentais na aprendizagem de conceitos científicos. O nosso olhar sobre os episódios direcionou-se para a qualidade do pensamento presente no processo de apropriação conceitual, procurando identificar as ações que oportunizam o desenvolvimento do pensamento teórico.

#### **4.5. Episódio V – Análise, Reflexão e planificação das ações: Índícios da formação do pensamento teórico**

Neste *Episódio* destacamos alguns movimentos de formação do pensamento teórico – reflexivo e analítico – que foram se tornando mais evidentes a partir do sétimo encontro. Movimentos que evidenciam o que os estudos de Davidov (1988) e da investigação de Ribeiro (2011) denominam tomada de consciência, identificação e compreensão dos elementos que constituem o conceito estudado e sobre suas ações de ensino.

O professor Leo, apresenta indícios de um movimento reflexivo e analítico sobre o ensino do conceito, ao tomar consciência do conceito de fração nos “limites do visual empírico” e tenta justificar o porquê de se utilizar a barra de chocolate e a figura da pizza:

*Eu acho que não favorece começar com a parte teórica, quando se chama as partes da fração de denominador e numerador, fração própria, fração imprópria; quando vai falar de fração equivalente, isso é complicado, é uma parte muito teórica.* (Leo prof. 4º ano, E – 11, ☉)

Em sua fala, o termo “teórica” não está relacionado ao conhecimento científico

do conceito e sim à identificação de nomenclaturas relacionadas às frações. O professor demonstra em sua fala, que o ensino apenas ancorado na utilização de nomenclaturas e definições superficiais, dificulta a compreensão em sua integridade conceitual, confirmando o que Lopes (2008) aponta como um grave problema relacionado ao ensino desse conceito,

Não faz sentido gastar tempo produtivo das aulas com definições desse tipo. Falar de frações aparentes e até mesmo de frações impróprias, tão logo se está introduzindo as ideias sobre frações é um atentado à intuição do aluno. (LOPES, 2008, p. 4)

Ao final do depoimento do professor Leo, outras professoras se posicionam trazendo para o debate mais elementos reflexivos e analíticos sobre o modo geral de organização do ensino do conceito de fração:

*Eu acho que acaba ficando muito pela decoração, saber que embaixo é o denominador e em cima o numerador. Como a gente falou no outro encontro, fração, ler fração, utilizar fração não é uma coisa comum, não faz parte da nossa vida.* (Ana profa. 5º ano, E – 11, ☉)

Em seguida, outra professora do grupo, não se sentiu contemplada pela fala do colega, que tenta apresentar e justificar o ensino de fração baseado apenas no visual empírico. Ela manifesta a sua opinião sobre o ensino do conceito:

*Eu acho que não favorece o ensino... Aquela famosa pizza que vem no livro que a gente fica colando e copiando em outras partes. Eu acho que fica maçante e não favorece, já estou cansada disso.* (Nina profa. 5º ano, E – 11, ☉)

Aqui a professora Nina, demonstra uma inquietação em relação à organização do ensino do conceito de fração ancorado nas características do pensamento empírico, ao manifestar que apenas a representação de figuras e situações que envolvem a concepção parte/todo e sua quantificação discreta, não favorece o ensino do conceito. Esse momento de análise aponta mudanças no tipo de pensamento, do pensamento empírico ao pensamento teórico. Pois, demonstra o seu distanciamento em relação à proposta elaborada e apresentada no sétimo encontro, onde na ocasião, havia considerado como uma proposta adequada iniciar o conceito de fração “utilizando a repartição de um

alimento” (excerto do quadro 6 ).

Nesse diálogo, é possível analisar que o grupo começa a tomar consciência do que Leontiev (1978) preconiza em seu estudo, que a necessidade se materializa no objeto, tornando-o motivo da atividade, o mesmo se dá na atividade de ensino. Também, os docentes manifestam traços de transformação no tipo de pensamento, aproximando-se do pensamento teórico, conforme Rubtsov (1996) que denomina *elaboração* o conhecimento teórico que se apresenta “por meio de uma análise do papel e da função de uma certa relação entre as coisas no interior de um sistema” (ROSA; MORAES; CEDRO, 2010, p. 77). Dessa forma, demonstram a necessidade de ampliar o conhecimento sobre o conceito de fração para que possam propor situações desencadeadoras de aprendizagem sobre o conceito.

No relato a seguir, a professora Ana apresenta o movimento reflexivo sobre a sua prática e manifesta as dificuldades que enfrentou ao trabalhar uma proposta do livro didático sobre o conceito de fração. :

*[...] momento desabafo: eu fui trabalhar com eles o exercício de reta numérica... Eu achava: uma retinha numérica vou saber fazer, vou passar, depois faço a correção e tá tudo certo. Gente... Oh, sufoco! Porque eu expliquei de um jeito sem olhar a resposta e quando eu olho lá, ela não estava contando tudo, (...) só depois que eu fiz essa atividade com eles que eu fui olhar a resposta e eu vi que não era, só que eu não sabia explicar o jeito do livro. (...) Porque eu nunca tinha visto fração numa reta, eu nunca tinha associado que o milímetro era uma fração da medida. É difícil para gente explicar essas coisas minuciosas se a gente não sabe o processo. (Ana, profa. 5º ano, E – 11,☉)*

Podemos analisar nesse relato, que a professora Ana, apresenta indícios de um pensamento empírico sobre o conceito de fração. Sua compreensão sobre o conceito estava centrada apenas nas peculiaridades do concreto, conforme Davidov (1982, 1988) que esse tipo de pensamento se baseia no princípio da identidade puramente formal e abstrata, como destacam Rosa, Moraes e Cedro (2010) sobre o pensamento empírico:

Possibilita ao sujeito uma atividade cognitiva que lhe assegure a separação

dos atributos dos objetos ou fenômenos e sua designação, incluindo aí aqueles que em determinado momento não são possíveis de serem observados e que somente podem ser conhecidos por meio de deduções. (ROSA, MORAES E CEDRO, 2010, p. 73)

O relato da professora Ana, também, demonstra a dificuldade em compreender que as frações como parte do sistema de numeração - números racionais. No entanto, só foi possível compreender essa relação quando os professores ultrapassaram o pensamento empírico sobre o conceito de fração e caminharam em direção ao pensamento teórico, observando dessa forma que a fração está além da sua representação geométrica.

A professora Ana continua o seu relato demonstrando o movimento reflexivo e analítico em direção ao pensamento teórico:

*Aí eu vi que a aula acabou e eles estavam com um enorme ponto de interrogação, porque eu falei uma resposta que nem eu tinha entendido direito. Então, preciso retomar e diminuir o prejuízo.*

(Ana profa. 5º ano, E -11, ☉)

A professora Ana, evidencia a importância de conhecer o conceito para a organização de situações de ensino, pois percebe que ao ensinar o conceito de fração a partir de exemplos particulares (característica do pensamento empírico), não se consegue explicar o conceito em seu caráter geral, de modo a compreendê-lo e utilizá-lo em diferentes situações (característica do pensamento teórico).

A partir do depoimento da professora surgiu no grupo a necessidade de elaborar uma situação desencadeadora de aprendizagem sobre o conceito de fração e a sua localização na reta numérica. Essa situação constituiu o movimento de planificação das ações manifestando assim, indícios da formação do pensamento teórico dos professores participantes da pesquisa. Conforme, registro no diário de campo:

*No encontro de hoje, os professores se identificaram com o “desabafo” da professora sobre a dificuldade de compreender a fração como número racional, e combinaram para o próximo encontro pensar em uma proposta de ação para ser desenvolvida com os estudantes. (Pesquisadora, E – 11, ☿)*

Durante o movimento de planificação das ações foram apresentadas três sugestões, conforme segue nos registros abaixo:

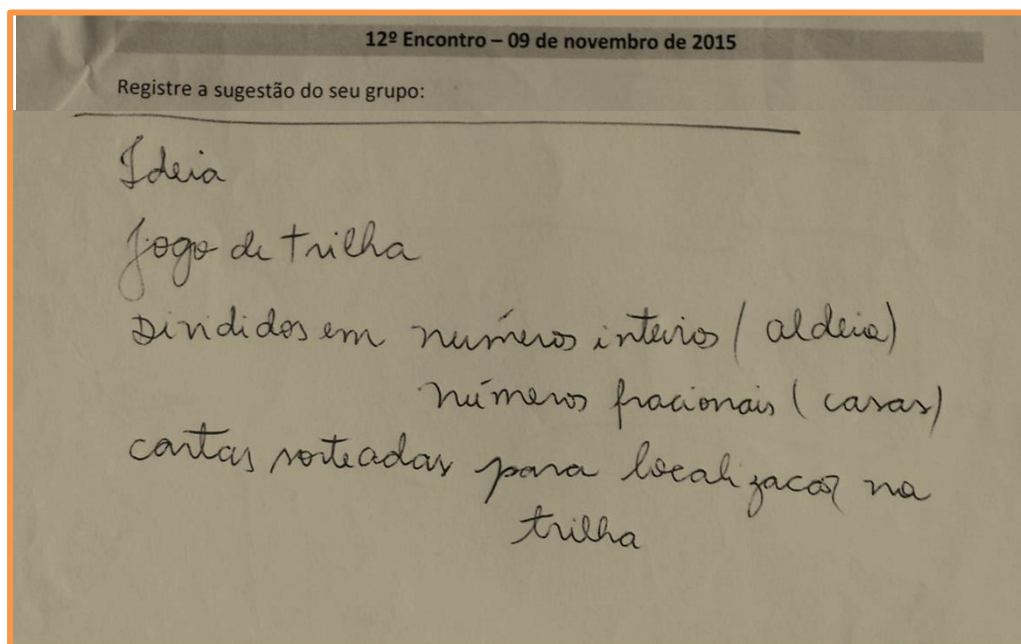


Figura 16 - Proposta – 1. (Ana e Rita, profa. 5º ano, E – 13, )

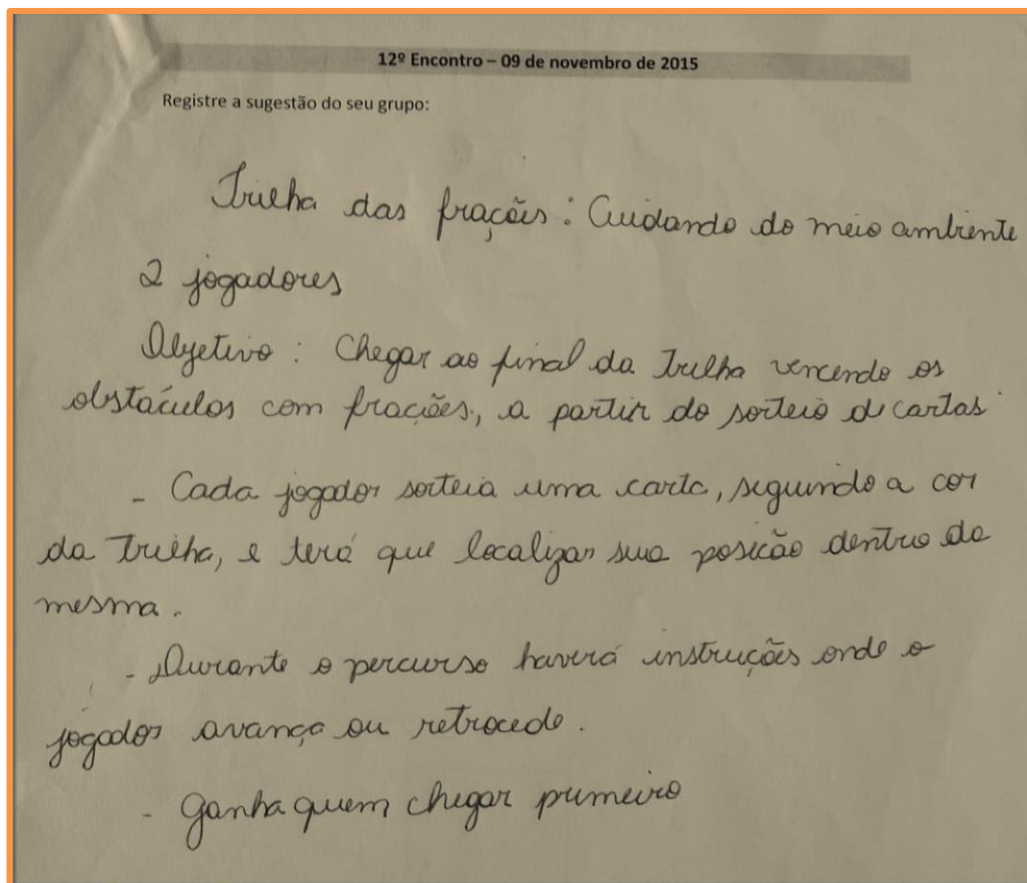


Figura 17 - Proposta – 2. (Cleo e Rute, profa. 4º ano, E – 13, )

As sugestões de situações desencadeadoras de aprendizagem apresentadas utilizaram como recurso metodológico o jogo, como observado na Proposta 1 e 2 elaboradas pelos professores.

As propostas 1 e 2 tinham como objetivo apresentar aos estudantes situações de ordenação e localização dos números fracionários na reta numérica, a partir de um jogo de trilha. No entanto, quando as professoras Cleo e Rute socializaram o jogo que denominaram “Trilha das frações: Cuidando do meio ambiente”, conforme registro da proposta (figura 17), perceberam que essa proposta não atenderia o objetivo de apresentar a relação da fração com o seu significado aritmético. Pois, conforme descrição do jogo “cada jogador sorteia uma carta [contendo a escrita de uma fração], seguindo a cor da trilha, e terá que localizar sua posição dentro da mesma.”, dessa forma o participante só teria a necessidade de contar os espaços que compõe a trilha, reincidindo na situação de quantificação discreta. Por esse motivo essas propostas foram refugadas pelo grupo.

A proposta elaborada pelas professoras Nina e Cida, exposta a seguir, também passou pela problematização acerca da situação de quantificação discreta, presentes nas propostas anteriormente.

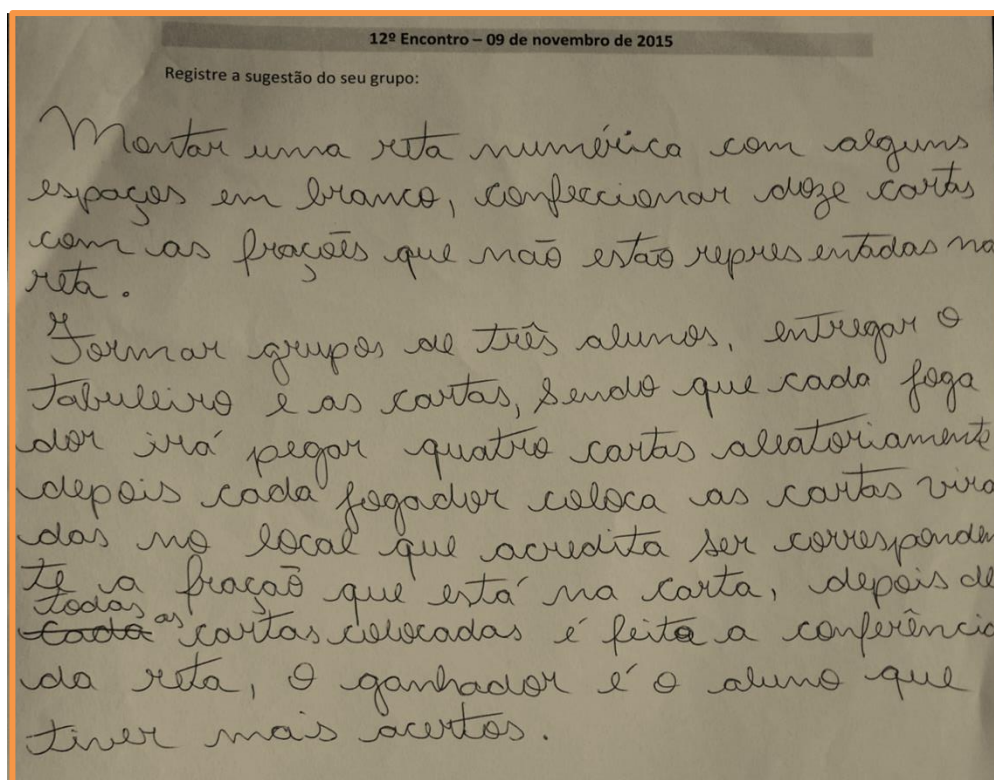


Figura 18 - Proposta – 3. (Nina e Cida, profa. 5º ano, E – 13, 88)




A proposta elaborada pelas professoras Nina e Cida, referido na figura 18, apresenta um jogo cujo objetivo era proporcionar aos estudantes a compreensão que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos naturais, para isso utilizou-se um tabuleiro com o formato de uma reta numérica, e os números racionais eram representados por cartas que seriam usadas para preencher os “espaços em branco”, marcações da reta numérica projetada no tabuleiro do jogo. Essa proposta foi escolhida pelo grupo para ser desenvolvida com as turmas do quarto e quinto ano do ensino fundamental.

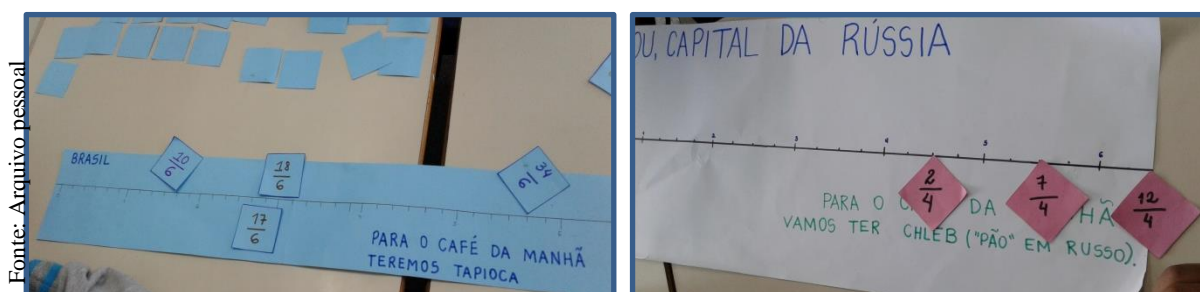
Durante a elaboração de situações desencadeadoras de aprendizagem foi revelado o movimento de superação do pensamento empírico para o desenvolvimento do pensamento teórico, o qual foi se constituindo no decorrer da pesquisa, principalmente, quando os professores depararam com a necessidade de organizar o ensino do conceito de fração. Chegando ao estágio de constituição do pensamento teórico, denominado por Davidov (1988) como planificação das ações, movimento que demonstrou a ampliação do conhecimento sobre o conceito das frações, fato que pode ser observado a partir da comparação das primeiras propostas elaboradas pelos professores durante o 7º encontro, onde é possível verificar que o ensino das frações estava baseado nas características visuais. Já no 13º encontro, as propostas apresentadas pelos professores, explicitam algumas propriedades mais complexa do conceito, como a relação entre o geral (sistema de numeração) e o particular (as frações), na representação da reta numérica.

A situação desencadeadora de aprendizagem, escolhida pelos professores, aproximou-se dos pressupostos da Atividade Orientadora de Ensino, já apresentada no capítulo 1, e durante a discussão e produção da proposta-3, manifesta existência de alguns elementos que compõe AOE, como a: ação intencional, os objetivos considerados durante a realização da proposta, o foco no conhecimento que o aluno mobiliza e os interesses e desafios que o motivam (MOURA, 1996). Esses elementos foram se constituindo ao longo do planejamento da situação desencadeadora de aprendizagem, denominada pelo grupo como “Jogo da reta numérica”. Como podemos observar na anotação do diário de campo:

*No decorrer da produção do jogo, os professores perceberam que era preciso estabelecer as regras e escolher um tema para*

compor o jogo. (Anotação no diário de campo, E – 14, )


Com intuito de mobilizar o interesse das crianças, em participar do jogo, os professores utilizaram o recurso da histórica virtual baseado no livro “Como o mundo acorda”, autor Ye shil Kim.



Fonte: Arquivo pessoal

**Figura 19 - Jogo da reta numérica.**

De acordo, com a perspectiva teórica-metodológica da AOE que fundamentou a situação desencadeadora de aprendizagem, elaborada pelos participantes da pesquisa, a avaliação constitui-se como elemento inerente do planejamento e realização da atividade (MOURA, 2010). Este processo avaliativo esteve presente durante o processo de planificação das ações, mais especificamente nos seguintes momentos: no final da confecção do jogo, na escolha da história virtual e na produção dos cartões contendo as frações. Durante esse processo avaliativo os professores verificaram se a proposta atendia os objetivos estabelecidos inicialmente. E na avaliação da professora Rita aparece a seguinte análise:

*Olha... Se deixarmos com essas marcações [das subunidades da reta numérica] as crianças vão apenas contar os tracinhos, esse não é o nosso objetivo. O que podemos fazer? (Rita, profa. 5º ano, E -14, )*

A avaliação apresentada pela professora Rita mobiliza o grupo a discutir e reelaborar a proposta do jogo. Após esse momento de análise e reflexão coletiva, acerca do planejamento da situação desencadeadora de aprendizagem, a professora Nina apresenta uma sugestão para o grupo:

*Podemos tirar as marcações do tabuleiro do jogo, deixar que os alunos a partir da leitura dos cartões [contendo a fração] estabeleçam as subunidades.* (Nina, profa. 5º ano, E -14, ☉)

Os professores consideraram pertinente a sugestão da professora Nina e realizaram as alterações necessárias. Desse modo, evidenciaram que o movimento de transformação do pensamento, ocorre a partir da compreensão da existência de necessidades que surgem não somente da observação, mas de uma análise sistêmica do fenômeno.

Durante a planificação das ações em que ocorreu a elaboração da situação desencadeadora de aprendizagem denominada “Jogo da reta numérica” descrita anteriormente, tinha como objetivo evidenciar a relação da fração com o sistema de numeração, os números racionais, e a superação da quantificação discreta para a compreensão da quantificação contínua que é própria do conceito. O momento de planificação das ações foi evidenciado quando os professores perceberam que planejar situações desencadeadoras de aprendizagem sobre esse conceito, envolve a necessidade de compreender que o desenvolvimento do conceito de fração deve partir da sua base teórica histórica, e estar relacionado ao seu significado genuinamente científico (Davidov, 1982).

Na avaliação final do experimento didático, que ocorreu no décimo quinto encontro, é possível observar indícios dessa transformação:

*Eu tinha dado o exercício da reta numérica do livro, logo no começo do curso, eu lembro que nas primeiras aulas eu falei que tinha me atrapalhado toda. E depois do curso, aplicando o jogo eu consegui explicar, porque eu estava entendendo.*

*Porque na primeira reta eles (os educandos) perguntavam, eu respondia, eles perguntavam de novo eu respondia e não sabia mais se estava respondendo certo, eu estava me atrapalhando.*

*[...] E depois clareou muito, eu consegui explicar o jogo com domínio.* (Ana profa. 5º ano, E -15, ☉)

A professora Rita, concorda com a professora Ana e completa:

*Porque conforme foi passando, a gente foi realizando as atividades, estudamos e foi clareando as ideias. Eu acho que a sequência do curso fez diferença para a gente entender.* (Rita profa. 5º ano, E -15, ☉)

É possível notar que há uma compreensão de que o processo de apropriação do conhecimento científico, sobre o conceito de fração, deve estar presente na organização do ensino, pois a forma e o conteúdo são indissociáveis do objeto de estudo. Os depoimentos, acima e os que serão transcritos a seguir, explicitam que as professoras reconhecem as fragilidades que possuíam em relação ao conceito de fração.

*Tinha coisa que eu nem sabia, agora eu sei.* (Rute profa. 5º ano, E -15, ☉)

A professora Ana reconhece que muitas das fragilidades dos docentes sobre os conceitos, especialmente os de matemática, têm a sua origem na formação inicial:

*Quando aprendemos na faculdade, nem sempre explicam o conteúdo, explicam a metodologia. Quando aprendemos não era o entendimento do conceito... Não tivemos o entendimento do processo, fazíamos a conta mecanicamente, fazemos tudo mecanicamente e pronto. Mas, quando você se vê em sala de aula, que a gente tem que explicar o conceito, o processo para alguém, fica complicado... Porque você sabe fazer, mas não sabe explicar, então é difícil.* (Ana profa. 5º ano, E -15, ☉)

Como afirma Davidov (1982), o pensamento teórico é identificado na própria existência mediatizada, refletida e essencial do ser. Os indícios do desenvolvimento do pensamento teórico presentes nos relatos das professoras corroboram com Davidov (1988), quando ele afirma que:

Ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construído. A ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, a descoberta de sua essência. (DAVIDOV, 1988, p. 126)

A apropriação desse tipo de pensamento possibilita ao sujeito, condições para compreender e dar novos significados para o mundo que o cerca, permite a ele transformar a forma e o conteúdo do seu pensamento, que no trabalho docente essa transformação é projetada no conhecimento científico do conceito e na organização do ensino.

O Isolado “Movimento do pensamento teórico e a organização do ensino de fração”, possibilitou percebermos que apropriação do conceito de fração (conteúdo) e a organização do ensino (forma) manifestam-se como elementos inerentes ao trabalho docente, e mais específico a partir da nossa pesquisa, a atuação do professor que ensina matemática.

Esse movimento da apropriação do conceito de fração e a organização do ensino estiveram presentes no desenvolvimento das situações desencadeadoras de aprendizagem que constituíram o experimento didático. No mapa a seguir, evidenciaremos o movimento desse par dialético: conceito (conteúdo) e organização do ensino (forma).

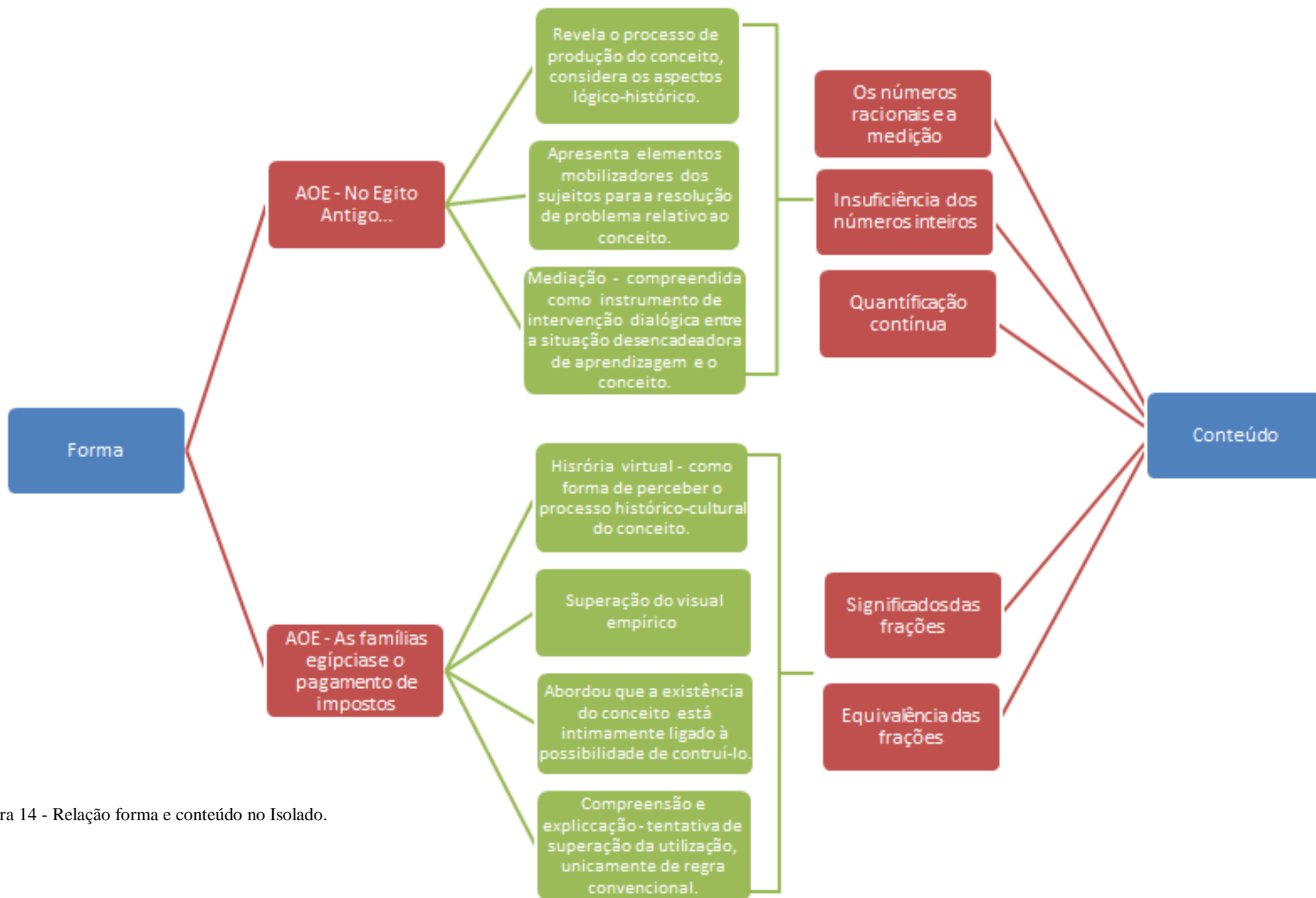


Figura 14 - Relação forma e conteúdo no Isolado.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

*A grande ideia básica de que o mundo não deve ser visto como um complexo de objetos completamente acabados, mas sim como um complexo de processos, no qual objetos aparentemente estáveis, nada menos do que suas imagens em nossas cabeças (nossos conceitos), estão em incessante processo de transformação...*

*FRIEDRICH ENGELS, Ludwig Feuerbach<sup>10</sup>*

A questão sobre a qual nos debruçamos nos últimos dois anos teve sua gênese na nossa reflexão sobre a aprendizagem docente e a organização do ensino de matemática. Buscando compreender *como a organização do ensino do conceito de Fração, a partir das contribuições da Teoria histórico-cultural e da Atividade Orientadora de Ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática no quarto e quinto ano do ensino fundamental*, decidimos utilizar as lentes teóricas da Teoria Histórico-Cultural - perspectiva teórica advinda das produções de Vigotski (2007, 2010), Leontiev (1978), Davidov (1982, 1988), entre outros estudiosos, por entender que tal referencial nos oferecia elementos para considerar a aprendizagem docente em movimento, num contexto histórico e cultural específico, num processo de produção coletiva. Assim, procuramos entender a relação entre o desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática e as suas ações de organização do ensino, perpassando desde a origem das ações docentes, até a apropriação do conhecimento científico matemático.

No decorrer dessa pesquisa, foi possível evidenciar que as mudanças da atividade docente possibilitam transformação no tipo de pensamento, de modo que o pensamento

---

<sup>10</sup> Trecho da Epígrafe do posfácio -Vigotski, L. S. A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

empírico pode ser superado na direção do pensamento teórico. Esse processo, de constituição do psiquismo humano, está diretamente relacionado à reflexão, análise e planificação das ações. Tal movimento foi evidenciado por meio da análise dos dados dessa pesquisa que mostrou como os professores (re) significaram a sua proposta inicial sobre o ensino das frações, inicialmente voltada para o desenvolvimento do pensamento empírico, e no decorrer do experimento didático, manifestaram indícios de transformação desse tipo de pensamento. Transformação essa que ficou evidente por meio da planificação das ações que evidenciou algumas particularidades do pensamento teórico.

Destaca-se nesse processo, o conceito da Atividade Orientadora de Ensino que, ao ser adotado no experimento didático como proposta de organização da atividade de ensino e de aprendizagem, se mostrou como desencadeador da apropriação do conceito. Além disso, a AOE possibilitou relacionar o importante papel da organização do ensino no desenvolvimento do pensamento teórico no conceito da fração. O estudo de aspectos históricos e conceituais do conceito da fração foi essencial para a explicitação de elementos de sua essência e a superação da simples observação das propriedades aparentes e particulares do conceito, características do pensamento empírico.

Um dos aspectos evidenciados durante o desenvolvimento da pesquisa foi o quanto a metodologia proposta no curso, fundamentadas na Teoria Histórico-cultural, Teoria da Atividade e na Atividade Orientadora de Ensino, influenciou não só a aprendizagem do conceito de fração, mas, sobretudo, criou condições para garantir a mudança no tipo de pensamento dos docentes.

A análise dos dados obtidos durante o experimento didático evidenciou que o ensino do conceito de fração se limita inicialmente à quantificação discreta, não estabelecendo relação com a quantificação contínua e, desta forma, limitando a compreensão do conceito aos limites do pensamento empírico. Para contrapor essa realidade, dentro da perspectiva histórico-cultural e da teoria da atividade, foram apresentadas situações desencadeadoras de aprendizagem para o desenvolvimento do conceito de frações, ancoradas na construção histórica do conceito. Isto porque entendemos



que, desse modo, os elementos necessários para a concepção do conceito vislumbram a produção historicamente construída a partir da necessidade humana.

Os dados obtidos na investigação apresentam indícios que a forma (organização do ensino) e o conteúdo (conhecimento científico do conceito) são elementos indissociáveis e elementares na atividade de ensino para constituição do pensamento teórico, pois o professor ao se apropriar de elementos do conhecimento científico (conteúdo), no caso o conceito teórico de fração, tem a possibilidade de transformar o pensamento empírico que tinha inicialmente para desenvolver o pensamento teórico na sua relação com o objeto de ensino e reorganizar situações desencadeadoras de aprendizagem. Desse modo, a transformação no tipo de pensamento ocorre tanto no docente, como se projeta nos educandos. Conforme Davidov (1982, 1988) esse movimento passa pelo processo de análise, reflexão e planificação da ação e esteve presente em todo o processo do experimento didático como exposto no capítulo 4.

Na análise dos dados, identificamos o *Isolado* “Movimento do pensamento teórico e a organização do ensino de fração”. Esse isolado apresenta inicialmente situações nas quais os professores partem de uma abordagem do conceito de frações focada unicamente “nos limites do visual empírico” (ROSA et al., 2013), não atingindo as abstrações científicas que se constituem como uma das características pertencentes ao pensamento teórico, mas ao longo dos episódios analisados essa situação foi sendo superada. Como estratégia metodológica desenvolvida no experimento didático, abordamos o conceito de fração a partir de situações desencadeadoras de aprendizagem envolvendo a medida e a constituição da fração. Como afirmam Dias e Moretti (2011, p. 124) “uma notação matemática para representar a medida com a subunidade foi a FRAÇÃO de números inteiros ligados estreitamente com o conceito de *fracionar* a unidade de medida”.

As limitações teóricas das propostas iniciais apresentadas pelos professores foram evidenciadas no *episódio I* - Nos limites do visual empírico, no qual evidenciou-se que as propostas de introdução do conceito de fração apresentadas inicialmente pelos professores da pesquisa, propiciavam a concepção de fração nos limites do visual empírico. Desse

modo, o conhecimento do conceito de fração estava baseado na observação e na representação concreta do objeto, a partir da utilização de exemplos associados a alguma classe formal e à comparação dos objetos relacionados apenas as suas características comuns.

O *episódio II* - Frações e seus significados evidenciou que o pensar teórico sobre o conceito de frações passa por reconhecer e compreender seus diferentes significados e, desta forma, tal compreensão é parte do desenvolvimento do pensamento teórico sobre esse conceito uma vez que o domínio e reflexão sobre diferentes significados de fração possibilita ao sujeito construir e identificar os números racionais na compreensão e resolução de diferentes situações. O movimento do pensamento na direção do pensamento teórico evidenciou-se nesse episódio pelo movimento de análise e reflexão dos professores ao manifestarem a necessidade de analisar e questionar tanto os materiais que utilizavam como apoio para o ensino, quanto o seu próprio conhecimento acerca do conceito de fração.

No *episódio III* - Atividade Orientadora de Ensino: No Egito Antigo, revelou-se que a compreensão de elementos essenciais do conceito de fração passa pela organização de ações que favorecem o desenvolvimento do pensamento teórico em relação ao conceito, tais como a criação de subunidade e a comparação de grandezas, que permitiram a superação da simples observação das propriedades particulares e observáveis do conceito. Para isso, foi fundamental o apoio à síntese histórica do conceito evidenciou que alguns elementos essenciais do conceito devem ser ensinados.

Já o *episódio IV* - AOE - As famílias egípcias e o pagamento de impostos, ao focar a relação entre o conceito de fração e a grandeza contínua e a equivalência das frações, trouxe elementos que revelaram como os professores são capazes de superar o uso de regras não compreendidas quando colocados diante da necessidade do conceito. A transformação do objeto que resultou na comparação das frações aproxima-se de características do pensamento teórico.

O nosso olhar sobre os episódios III e IV direcionou-se para a qualidade do pensamento presente no processo de apropriação conceitual, procurando identificar as ações que oportunizaram o desenvolvimento do pensamento teórico passando pelo

conhecimento conceitual presente no conteúdo e forma, relação essa que contempla tanto a apropriação do conceito quanto a organização do ensino de fração.

O *episódio V* - Análise, Reflexão e Planificação das ações: Indícios da formação do pensamento teórico, destacou alguns movimentos de formação do pensamento teórico – reflexão, análise e planificação das ações – os quais, evidenciaram a tomada de consciência, identificação e compreensão dos elementos que constituem o conceito estudado e sobre suas ações de ensino (DAVIDOV, 1988). Ao planificarem ações na elaboração do “Jogo da reta numérica” evidenciou-se a preocupação dos professores com a superação da quantificação discreta visando à compreensão da quantificação contínua. Nesse processo, os professores perceberam a necessidade de compreenderem o desenvolvimento do conceito de fração a partir da sua base teórica histórica, seu significado genuinamente científico (Davidov, 1982), para a organização do ensino com vistas ao pensamento teórico. Ou seja, ao começar a pensar teoricamente sobre o conceito, o professor passa a ter como preocupação desenvolver o pensamento teórico de seus estudantes. Assim, foi possível notar que passou a haver uma compreensão de que o processo de apropriação do conhecimento científico, sobre o conceito de fração, deve estar presente na organização do ensino, pois a forma e conteúdo são vertentes do objeto de estudo.

Conforme Davidov (1988) o conceito deve advir das teses gerais da área do saber, e não dos casos particulares. É necessário buscar a célula, a gênese e a essência do conceito.

Assim como os escritos de Engels expostos na epígrafe dessa seção, compreendemos que tanto os movimentos dos professores na construção de seu pensamento teórico, quanto todo o processo de coleta, reflexão e entendimento dos dados dessa pesquisa não podem ser vistos como algo acabado, pois nada está pronto. Ambos os processos são complexos e estão em constante transformação.

Retomando a questão de investigação acerca da relação entre o conceito de Atividade Orientadora de Ensino e o desenvolvimento do pensamento teórico do professor sobre o conceito de fração, podemos afirmar diante dos dados analisados que o conceito de Atividade Orientadora de Ensino, quando presente no processo de formação e organização

do ensino, pode favorecer a compreensão de elementos essenciais do conceito e, nesse sentido, favorece a superação do pensamento empírico para o pensamento teórico, pois mobiliza os docentes a reverem o sentido de sua atividade, em um processo de organização consciente e intencional do ensino da matemática. Nesse sentido, colocar os professores diante de situações problemas produzidos a partir da síntese histórica do conceito possibilitou o movimento de transformação do pensamento o que, conforme Davidov (1988), ocorre a partir da compreensão das necessidades que surgem não unicamente da observação, mas, sobretudo, da análise e sistematização do fenômeno, passando pelo movimento de análise, reflexão e planificações das ações.

Tal forma de conceber a formação docente assume-a como processo de aprendizagem docente e, portanto, tanto como um meio que promove o desenvolvimento quanto como o próprio processo desse desenvolvimento, pois é na atuação docente e no ato de organização do ensino que o professor constitui-se como professor (MORETTI e MOURA, 2010).

Assim, os resultados dessa pesquisa reforçam que a aprendizagem docente pode resultar de uma constante busca mediada de novas ações que reflitam novas apropriações teóricas do professor na articulação entre a teoria e a prática na organização do ensino de matemática. Processo esse que ao mesmo tempo influencia e é influenciado pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, Gisele Mendes. **Matemática na Educação Infantil?** Contribuições da Atividade Orientadora de Ensino para a (re) organização da prática docente. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São Paulo, Programa de Pós Graduação em Educação, 2015.

AMORIM, M.P. **Apropriação de significações do conceito de número racionais: um enfoque histórico-cultural.** Dissertação de mestrado, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2007.

BAKHTIN, M.; VOLOCHINOV. **Estética da criação verbal.** Trad. Maria Ermantina Galvão G. Pereira. São Paulo: Martins Fontes; 1997.

BAKHTIN, M.M.; VOLOCHÍNOV, V.N. **Marxismo e filosofia da linguagem.** Tradução de Michel Lahud e Yara Frateschi Veira. 12. ed. São Paulo: Hucitec, 2006.

BEHR, M., LESH, R., POST, T.R. e SILVER, E. A. **Rational Number Concepts. In Lesh, R. e Landaus, M. (Eds). Acquisition of Mathematical Concepts and Process** (pp. 91 – 126). New York: Academic Press, 1983.

BERNARDES, M. E. M. **Mediação Simbólica na Atividade Pedagógica: Contribuições do Enfoque Histórico-Cultural para o Ensino e Aprendizagem.** Tese Doutorado – Universidade de São Paulo, SP, 2006.

BORDEAUX, Ana Lúcia et al. **Novo bem-me-quer: matemática, 5º ano; ensino fundamental.** 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2014.

BOYER, Carl Benjamin, 1906 – **História da Matemática:** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental-Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática /Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1997.**

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 9 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CATALINI, Erica Maria Toledo. **A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração – Dissertação (Mestrado) – Campinas, SP, 2002.**

CEDRO, Wellington Lima; DE MORAES, Silvia Pereira Gonzaga; DA ROSA, Josélia Euzébio. **A Atividade de Ensino e o Desenvolvimento do Pensamento Teórico em Matemática.** Ciência & Educação, v. 16, n. 2, p. 427-445, 2010.

CENTURIÓN, M. R.; TEIXEIRA, J. L. S; RODRIGUES, A. B. **Porta Aberta: matemática, 5º ano: ensino fundamental: anos iniciais**. 1º ed. São Paulo: FTD, 2014.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado em Educação) – pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Ápis: matemática**. 2º ed. São Paulo: Ática, 2014.

DAVIDOV, V.V. **La enseñanza escolar el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental**. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVIDOV, V.V. **Tipos de generalización em la enseñanza**. Havana: Pueblo y Educación, 1982.

DAVÍDOV, V.V. **Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo**. In: SHUARE, M. (Org.). *La Psicología evolutiva y pedagógica em la URSS: antologia*. Moscou: Progeso, 1987. p. 143-142.

DERMARTINI, I. T. **Refletindo sobre a Formação do Conceito de Número Racional na Forma Fracionário**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Passo fundo, Passo Fundo, 2009.

DIAS, M S. **Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógica-histórica**. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

DIAS, M. S.. **A fração na dialética entre medida e número racional: a atividade na formação conceitual (CO)**. *XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*. 2011.

DIAS, M. S; MORETTI, V. D. **Números e operações: elementos lógico-históricos para atividade de ensino**. Curitiba: Ibpx, 2011.

DUARTE, N. **Educação escolar: teoria do cotidiano e a escola de Vigotski**. 3. Ed. Ver. E ampl. Campinas, SP: Autores Associados, 2001.

DUHALDE, Maria Helena; CUBERES, Maria Tereza Gonzáles. **Encontros Iniciais com a matemática: contribuição à Educação Infantil**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

ENGELS, F. **Dialéctica da Natureza**, Ed. Sociales, 1975, p. 171.

FIORENTINI, D. **Tendências metodológicas da pesquisa em educação matemática**. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1989, Campinas. Anais...SBEM, 1989. P. 186-193.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FREITAS, M. T. A. **A abordagem sócio histórica como orientadora da pesquisa qualitativa**. Cadernos de Pesquisa, n. 116, p. 21-39, julho/2002.

GATTI, B. A. **A construção da pesquisa em educação no Brasil**. Brasília. Plano Editora, 2002.

IFRAH, Georges. **Os números: história de uma grande invenção**. Tradução Stella Maria de Freitas Senra; revista técnica Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira. – 11 ed. – São Paulo: Globo, 2010.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Horizonte Universitário, 1978.

KIEREN, T. (1976). **On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers**. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Paper from a Research workshop*, (pp.101–144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC

LEONTIEV, A. N. **Actividad, consciência, personalidade**. Ciudad de La Habana. Pueblo y Educación, 1983.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A, M. M. **Vasili Vasilyevich Davydov: A escola e a formação do pensamento teórico-científico**. In: LONGAREZI, A. M. & PUENTES, R.V. (Orgs) *Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos*.Uberlândia, MG: Edufu, p. 315-350. 2013.

LIMA, Silvana Ferreira de. **Projeto Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI na rede pública estadual de São Paulo: implementação, concepções, desafios e lições**. Anais do Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul. São Paulo. p. 1-11. 2012.

LOPES, Antonio José. **O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**. *Rio Claro: Bolema* , p. 1-22, 2008.

MALASPRINA, M. C. O. **O Início do Ensino de Fração: uma intervenção com alunos de 2ª série do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LUKÁCS, György. **Introdução a uma estética marxista**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MARTINS, Lígia Márcia. **O Desenvolvimento do Psiquismo e a Educação Escolar**. 1. ed. Campinas (SP): Autores Associados, 2013.

MARTINS, Lígia Márcia; EIDT, Nádia Mara. **Trabalho e atividade: categorias de análise na psicologia histórico-cultural do desenvolvimento.** *Psicologia em Estudo*, v. 15, n. 4, p. 675-683, 2010.

MARX, K. **Processo de trabalho e processo de valorização.** In K. Marx. *O Capital* (Livro I, Tomo 1, pp. 149-163) São Paulo: Nova Cultura, 1985.

MARX, Karl. **O Capital: Crítica da Economia Política.** Livro I, v. I, 9. ed. São Paulo: Difel, 1984.

MELLO, Suley Amaral; LUGLE, Andreia Maria Cavaminami. **Formação de Professores: Implicações Pedagógicas da Teoria Histórico-Cultural.** *Revista Contrapontos*, v. 14, n. 2, p. 259-274, 2014.

MIORIM, M. **Introdução à história da educação matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MORAES, S. P. G. **Avaliação do processo de ensino e aprendizagem em matemática: contribuições da teoria histórico-cultural.** Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de São Paulo, SP, 2008.

MORETTI, V. D. **Professores de Matemática em atividade de ensino: uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente.** 2007. 206 f. Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de São Paulo, SP, 2007.

MORETTI, Vanessa Dias; DE MOURA, Manoel Oriosvaldo. **Professores de Matemática em Atividade de Ensino: Contribuições da Perspectiva Histórico-Cultural para a Formação Docente.** *Ciência & Educação*, v. 17, n. 2, p. 435-450, 2011.

MORETTI, Vanessa Dias; MOURA M. O. **O sentido em movimento na formação de professores de matemática.** *Zetetiké*, v. 18, nº34, jul-dez, 2010, pp 155-180.

MOURA, M. O. (Coord.). **Controle da variação de quantidades.** Atividade de ensino. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1996.

MOURA, M. O. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** (org.). Brasília: Liber livros, 2010.

MOURA, Manoel Oriosvaldo; CEDRO, Wellington Lima. **Possibilidades Metodológicas na Pesquisa em Educação Matemática: o experimento didático.** *Educativa*, 15.1: 25-38, 2012.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglioni. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender.** Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2009.

NASCIMENTO, Rubem de Oliveira. **Um Estudo da Mediação Na Teoria De Lev Vigotski e suas Implicações para a Educação.** Tese De Doutorado. Ufu, 2014.



OLIVEIRA, B. **A dialética do singular-particular-universal**. In: ABRANTES, A. A.; SILVA, N. R.; MARTINS, S. T. F. *Método histórico-social na psicologia social*. Petrópolis, RJ: Vozes, Cap. 2, p. 25-51, 2005.

OLIVEIRA, Betty Antunes. Fundamentos filosóficos marxistas da obra Vigotskiana: a questão da categoria de atividade e algumas implicações para o trabalho educativo. **Vigotski e a escola atual: fundamentos teóricos e implicações pedagógicas**, Araraquara, SP: Junqueira & Morin, 2006.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely. **As diferentes “personalidades” do número racional trabalhadas através da resolução de problemas**. Bolema-mathematics Education Bulletin-boletim de Educacao Matematica, 2008, 79-102.

PERLIN, Patrícia. **A formação do professor dos anos iniciais do ensino fundamental no movimento de organização do ensino de fração: Uma contribuição da Atividade Orientadora de Ensino**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Maria, RS, 2014.

RIBEIRO, F.D. **A aprendizagem da docência na prática de ensino e no estágio: contribuições da Teoria da Atividade**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, SP, 2011.

ROCHA, Andrezza Guarsoni. **Projeto Buriti: matemática: ensino fundamental**. 3. ed. - São Paulo: Moderna, 2014

ROONEY, Anne. **A História da Matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda. 2012.

ROSA, J. E. da et al. **Relações entre as proposições para o ensino do conceito de fração com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico-Cultural**. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.08, Ed. Especial (dez.), p. 227-245, 2013.

ROSA, J. E. et al. **Movimento do Conhecimento Matemático na História Virtual Verdim e seus Amigos**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 06, p. 21-41, 2013.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas**. 2012. 244 f. Tese (Doutorado em Educação). Área de concentração: Educação Matemática - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSA, Josélia Euzebio da, et al. **Relações entre as proposições para o ensino do conceito de fração com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico-Cultural** Revemat: revista eletrônica de educação matemática 8. p 227-245, 2013.

RUBTSOV, V. **A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares**. In: GARNIER, C.; BERDNARZ, N.; ULANOVSKAYA, I. (Org.). *Após Vygotsky e Piaget: perspectivas sociais e construtivista escolas russa e ocidental*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SECCHI, Leonardo. **Políticas públicas: conceitos, esquemas de análise, casos práticos**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SILVA, Maria José Ferreira da; ALMOULOUD, Saddo Ag. **As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo**. *Boletim de Educação Matemática* 21.3, p. 55-78, 2008.

SILVA, Maria José Ferreira da. **As Concepções de Números Fracionários**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

SOUZA, Márcia Guimarães Oliveira de; RESENDE, Marilene Ribeiro. **O Papel do docente e das instituições educativas**: Um estudo na perspectiva Histórico-Cultural. *Revista Encontro de Formação de Professores*. Uberaba, v. 1, n. 1, p. 1- 7, 2013.

TANURI, Leonor M. **História da formação de professores**. *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, n° 14, p. 61 – 88, mai/jun/jul/ago 2000.

TAVARES, Celina Maria Ramos. **Conhecimento dos futuros professores do 1.º ciclo do ensino básico sobre números racionais**. Dissertação. Universidade de Lisboa – Instituto de Educação, 2012.

VEIGA, Cynthia. G. **História da Educação**. São Paulo: Ática, 2007.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**. 6. Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**/L.S. Vigotsky; organização Michael Cole...[et al.] tradução José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange astro Afeche - 7º Ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VIGOTSKI, Lev S. In: VIGOTSKI, Lev S. **A Formação Social da Mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem** / Lev Semenovich, Alexander Romanovich Luria, Alex N. Leontiev; Tradução Maria da Penha Villalobos. – São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo, 1988.

VIGOTSKI, Lev. S. Pensamento e palavra. In: **A construção do pensamento e da linguagem**. (Trad. Paulo Bezerra). São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VIGOTSKI, Lev. S. **A construção do pensamento e da linguagem**; Tradução Paulo Bezerra. – 2ª. Ed./ 3ª. Tiragem – São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2010.

## ANEXO 1



### UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO – UNIFESP

**Curso:** O conceito de Fração e a organização do ensino a partir de Atividades Orientadoras de Ensino

#### Atividade Didática em grupos

#### A CARTA CAITITÉ<sup>11</sup>

Caros colegas,

Como vocês sabem, estou em Iauip, país maravilhoso, para conhecer os avanços dos seus acadêmicos em matemática. Já participei do primeiro seminário. O nosso tema foi a descoberta de um sistema de numeração de uma comunidade chamada Caitité. Os renomados professores Ovatsug e Oiegres apresentaram as suas descobertas iniciais baseadas em escritas que parecem representar os bens de um rico senhor daquela comunidade.

Os professores disseram que foi possível perceber que as quantidades de um a doze podem ser representadas da seguinte forma:  $\square$ , +, N,  $\square$ I,  $\square\square$ ,  $\square$ +,  $\square$ N, +I, + $\square$ , ++,+N, NI. Descobriram também que o povo Caitité já tinha um símbolo para o zero: I.

Os professores mostram uma inscrição que apresentava a figura de um jegue seguida dos símbolos +N $\square$ . Supomos que quem fez esta inscrição estava querendo comunicar o valor do jegue.

No próximo seminário pretendemos descobrir a lógica do sistema de numeração dos Caitités. Acreditamos que isso poderá trazer grande contribuição para entender a cultura desse povo. Estou enviando-lhes esse resumo do que já presenciei porque sei o quanto vocês ficarão desafiados para encontrar uma solução geral para o problema que estamos investigando.

---

<sup>11</sup> Atividade extraída da Oficina Pedagógica de Matemática da Faculdade de Educação da USP